

19

THE FIRST BOOK
OF
EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY
FOR
GUJARATI SCHOOLS.

BY
JAMSHEDJEE ARDES AIR DALAL, M. A., LL. B.

FORMERLY PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

વેચનાર

મોતીલાલ મગેનલાલ શાહ

બુકસેલર

રીચીરોડ—અમદાવાદ,

અને

૩૭૩ કાલબાદેવી રોડ,—મુંબઈ.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગુજરાતી કેપીરાઈટ વિભાગ]

અનુક્રમાંક ૧૭૩૦

વર્ગિક

પુસ્તકનું નામ ભૂમિતિના મૂળતત્ત્વો

વિષય મીટ્રા : ૬૪૪ : ૩૬

THE FIRST BOOK
OF
Euclid's Elements of Geometry.
FOR
GUJARATI SCHOOLS.

BY
JAMSHEDJEE ARDESHIR DALAI, M. A., LL.B.
FORMERLY PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

SEVENTH EDITION

AHMEDABAD-Richey Road. } M. M. Shah & sons.
BOMBAY-Kalbadevi. } *Booksellers & Publishers.*

Ahmedabad,

THE "DIAMOND JUBILEE" PRINTING PRESS.

A. D. 1906. Samvat 1962.

Price As. 8.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
અમદાવાદ
ગુજરાતી કોપીરાઈટ-સંગ્રહ

૧૭૩૦

પ્રા. ગ્રં. સંગ્રહ

(All rights reserved.)

*Registered for Copyright under the Government
of India's.*

Act XXV. of 1867.

.

યુકિલડની ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

સ્કંધ ૧.

ગૂજરાતી નિશાળોને માટે.

જમશેદજી અરદેશર દલાલ,

એમ. એ. એલ એલ. બી.

અમદાવાદ ગૂજરાત કોલેજના માજી પ્રિન્સિપાલ એઓએ રચ્યો.

સોતમી આવૃત્તિ.

સોલ એજન્ટસ:—

અમદાવાદ—રીચીરોડ.	}	મોતીલાલ મગનલાલ શાહ
મુંબાઇ—કાદખાદેવી.		એન્ડ સન્સ.
		પુકમેલર્સ એન્ડ પબ્લીશર્સ.

૪. સ. ૧૯૦૬ સંવત ૧૯૬૨,

અમદાવાદ.

ધી હાયમન્ડ જ્યુબીલી પ્રિન્ટિંગ પ્રેસ.

કિંમત ૮ આના.

I

આ પુસ્તકની માલિકી હિંદ સરકારના સને ૧૮૬૭ ના
૨૫ મા આક્ટ મુજબ નોંધેલી છે.

પ્રસ્તાવના.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વનું ભાષાન્તર ઘણાં વર્ષ ઉપર ઉત્તર વિભાગના ગૂજરાતી ભાષાન્તરકર્તા મેહેરખાન જેમ્સ ગ્રેફામ સાહેબે ગૂજરાતી ભાષામાં પ્રસિદ્ધ વિદ્વાન મેહેરખાન નંદશંકર તુળજશંકરની અમૂલ્ય સહાયતાથી કર્યું હતું. ઘણી રીતે એ ભાષાન્તર ઉત્તમ છે, તોપણ એ વિષયમાં પ્રવેશ પામેલા વિદ્યાર્થી શિવાય બાળકોને એ સ્પષ્ટ અને સુગમ પડે એવું નથી. એની ભાષા સંક્ષિપ્ત છે. અને સિદ્ધાંતનો પક્ષ પણ તેવાજ સંક્ષેપમાં સિદ્ધ કર્યો છે, પક્ષમાંનાં સ્પષ્ટ અથવા સહેલથી સમજાય એવાં સિદ્ધતાનાં કારણો મૂકી દેવામાં આવ્યાં છે, અને માત્ર મુખ્ય કારણજ આપ્યાં છે. એ પુસ્તક ઉંચા વર્ગના શિષ્યોને માટે લખેલું હોય એમ સ્પષ્ટ ભાસે છે. કેમકે એમાં આપેલી ટીકાથી પણ વાંચનારનું મન ગણિતશાસ્ત્રનાં ઉંચાં પ્રકરણ તરફ લોભાય છે. પણ એ ગ્રન્થનો હેતુ નવાસવા શિષ્યોને મદદ કરવાનો નથી અથવા હલકા વર્ગની પરીક્ષા માટે શાલાપુસ્તક તરીકે ખપવાનો નથી. તેથી એવી મતલબ એ ગ્રન્થથી સરે નહિ, અને વર્ગમાં નવાસવા શિષ્યોને આ વિષય શિખવવો હોય એવા શિક્ષકો તરફથી એ ગ્રન્થની સામા વાજખી વાંધો ઉડે એમાં કંઈ નવાઈ નથી. આ કારણથી કેળવણીખાતાના અધિપતિએ અંગ્રેજી નિશાળોમાં નીચલા વર્ગમાં ચાલતા ઉત્તમ ગ્રન્થોનો નમુનો લઈ ગૂજરાતીશાળા માટે બીજું ભાષાન્તર તૈયાર કરવા હુકમ કર્યો.

તેજ પ્રકારનો પ્રયત્ન આ પુસ્તકમાં કરવામાં આવ્યો છે. આ ગ્રન્થને સહેલી તેમજ શુદ્ધ ભાષામાં લખવાને ઘણીજ સંભાળ

લીધી છે; અને આશા રાખવામાં આવે છે કે શિક્ષકોને આ વિષય શિખવવાની મેહેનત ઓછી પડશે એટલુંજ નહિ પણ ઉદ્યોગી શિષ્ય શિક્ષકની મદદથી અથવા મદદ શિવાય પણ આ વિષયમાં સાફ જ્ઞાન સંપાદન કરવા શક્તિમાન થશે.

પારિભાષિક શબ્દો મેહેરબાન ગ્રેહામ સાહેબના ભાષાન્તરમાંથી લીધા છે. પણ રાં રાં રાવજી મોરેશ્વર દેવકુળેની મરાઠી ભૂમિતિમાંથી ઘણી અમૂલ્ય સૂચનાઓ મળી આવી છે. ઘણા સવાલ પણ એમનાજ ગ્રંથમાંથી દાખલ કર્યા છે. આ માટે ઘણી ખુશીથી હું એમનો ઉપકાર માનું છું.

આ ગ્રંથની સામાન્ય રચના ઉત્તર વિભાગના કેળવણી ખાતાના પરીક્ષક મેહેરબાન જામલસ સાહેબના કહેવા પ્રમાણે હાલ અને સ્ટીવન્સની ભૂમિતિ ભાગ ૧ ને અનુસરીને કરી છે. આ ભૂમિતિ પુસ્તક હાલમાં નવાં લખાયેલાં પુસ્તકોમાંનું એક છે, અને અંગ્રેજી નિશાળોમાં શાળાપુસ્તક તરીકે ઘણું ફત્તેહમંદ નીવડ્યું છે. એ પુસ્તક રચનારાઓએ ખાતાનાં શાળાપુસ્તકોની રચના ઘણા અનુભવી શિક્ષકોની અનુમતિ લઈ કરી છે, અને એ શિક્ષકો તરફથી તેમને ઘણી કિંમતિ સૂચનાઓ મળી છે. તે અંગ્રેજી પુસ્તકને અનુસરીને આ ગ્રંથ લખવામાં આવ્યો છે; તેથી એ ગ્રંથનો હેતુ બરોબર પાર પડશે એવી આશા રાખવામાં આવે છે.

‘પોપ્સ અને ટોલ્ડન્ટર’ ના ગ્રંથોમાં આપ્યા છે તેમજ સિદ્ધતાનાં બધાં કારણો અનુક્રમે આપ્યાં છે. વળી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ કરવા માટે નવાં કારણો પણ દાખલ કર્યા છે; પણ એવું કંવચિતજ કરવામાં આવ્યું છે, જેમકે પેહેલા સ્કંધના ૪૪મા સિદ્ધાંતમાં દરેક સિદ્ધાંતમાં પ્રતિજ્ઞા, સાધન, રચના, અને સિદ્ધતા ખુલ્લી રીતે પૃથક્ પાડ્યાં છે, અને પ્રત્યેક નવું સિદ્ધાંતનું કારણ

નવી લીટીમાં શરૂ કયું છે. વિદ્યાર્થિને આ વિષયને લગતી આબૂ-
બાબૂની બાબતમાં મદદ કરવાને ગૂઝરાતી બાપામાં ગ્રન્થ ન
હોવાથી સઘળી વ્યાખ્યાઓ, સ્વીકૃતકૃત્યો, અને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો
ઉપર પુષ્કળ ટિપ્પણ આપ્યું છે, અને એ શબ્દો બરોબર સમ-
જાવવા ઘણી મહેનત લીધી છે. વળી સઘળા અગત્યના સિદ્ધાંતો-
ઉપર પણ ઘણી ટીકા કરવામાં આવી છે.

દરેક સિદ્ધાંતને લગતા થોડાક સવાલ આપવામાં આવ્યા છે.
એમાંના ઘણા આકૃતિમાં અથવા રચનામાં લીટીઓનો ફેરફાર
કરવાના સંબંધમાં આપ્યા છે. અગત્યના સિદ્ધાંતના દરેક સમૂ-
હને અન્તે સહેલા પ્રશ્નો આપવામાં આવ્યા છે, આ બધા સ-
વાલો અને પ્રશ્નો યાતો વર્ગમાં અથવા ઘેરથી મનોમત્ત તરીકે
શિષ્યવર્ગ પાસે શિક્ષક સિદ્ધ કરાવશે તો ઘણો ફાયદો થશે. આસરે
સો સવાલ બધું મળીને છે અને તેટલાજ પ્રશ્નો પણ છે.

અધરો સિદ્ધાંત સુગમ કરવાની મતલબથી કેટલેક પ્રસંગે,
જેમકે ચોથા સિદ્ધાંતમાં, સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરતા પહેલાં સમજુતિ માટે
ટિપ્પણ આપવામાં આવ્યું છે. એવી જાતનાં ૬, ૭ અને ૨૭
સિદ્ધાંત ઉપરનાં ટિપ્પણથી શિક્ષકને શિષ્યવવાના કામમાં ઘણી
સહાયતા મળશે એમ ધારવામાં આવે છે.

જી ૦ અ ૦ ૬૦

અમદાવાદ.

જુલાઈ ૧૮૮૮.

સૂચના.



પંદર સોળ વર્ષની મુદતમાં આ શાળાપયોગી ગ્રન્થની મૂળ ,૩૪૦૦૦ પ્રતો ખપી જવાથી, સરકારી ગુજરાતી શાળાઓ-ને માટે આ સાતમી આવૃત્તિ મેહેરખાન ડિરેક્ટર ઑફ પબ્લિક ઈન્સ્ટ્રક્શન સાહેબના હુકમથી પ્રથમ જેવીજ સદ્દાષથી અને તેટલીજ કિંમતે છપાવવામાં આવી છે. હું કે વખતમાં સારા ખપ થઈ જવાથી ખાતરી થાય છે કે ભૂમિતિના વિગત માટે સર્વ પ્રકારે અનુકૂળ આ ગ્રન્થ થયો છે, એટલે એમાં ખીજે કંઈ ફેરફાર કરવામાં આવ્યો નથી.

મુંબાઈ,
ઓક્ટોબર ૧૯૦૬. }

જા. અ. ૬૦

યુક્તિજ્ઞની ભૂનિતિનાં મૂલતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

કોઈપણ પારિભાષિક શબ્દોનો અર્થ જે વાક્યમાં કહેલો હોય તે વાક્યને તે શબ્દની વ્યાખ્યા સમજવી.

વ્યાખ્યાઓ. (૧-૪)

૧. ચિંતુ તેને કહેવું કે જેને સ્થિતિ છે, પણ જેને કાંઈ મહત્ત્વ નથી. (એટલે જેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.)
૨. લીટી તેને કહેવી કે જેને લંબાઈ છે, પણ પહોળાઈ નથી.
૩. ઉપસી જે વ્યાખ્યાઓ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે લીટીના છેડાઓ તે ચિંતુ હોવા જોઈએ અને જે લીટીઓ એકેકને કાપે ત્યાં એક ચિંતુ હોવું જોઈએ.
૪. સીધી લીટી તેને કહેવી કે જેના જે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી હોય.

આ વ્યાખ્યાઓ વિશે થોડી સમજ આપવાની જરૂર છે.

(૧). આપણે સાધારણ રીતે એક ચિંતુનો વિચાર તો એક અનુસારનો, જેમકે ‘ચિંતુ’ શબ્દમાં ‘ચિ’ને ગાયે હોય છે તેને કરિયે છીએ; પણ ૧ વ્યાખ્યા પ્રમાણે તો ગણિત-વિધાનું એ

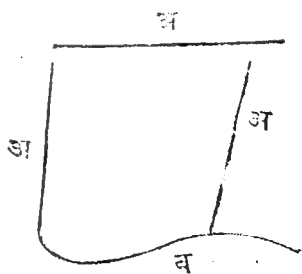
જિંદુ કહેવાય શકે નહિ. કારણ એ જિંદુ ગમે એવું કીર્ણ હોય તેપણ એને કાંઈ પણ મહત્ત્વ તો હોવું જોઈએ. જો આપણે એક સૂક્ષ્મદર્શક યંત્ર વડે એને જોઈશું તો એ મોટાટું દેખાશે; અને જો ધણાંજ સૂક્ષ્મ અને ખારીક હથિયારો આપણી પાસે હોય તો એવાં જિંદુનાં તો ભાગ કરી શકિએ; આ ઉપરથી તો આપણે જોઈએ છીએ કે એને મહત્ત્વ તો છે, જો ન હત તો ભાગ થઈ શકત નહિ. ત્યારે સવાલ કે એ વ્યાખ્યા પ્રમાણેનું જિંદુ કેવું હશે ? એનો જવાબ આપવો કઠણ છે; પણ ધારો કે એ નહાના જિંદુનો એક ધણોજ નહાનો ભાગ લઈએ; પછી તે ભાગનો વળી એક ધણોજ નહાનો ભાગ લઈએ; પછી તેનો નહાનો ભાગ લઈએ; એમ કરતાં એટલે સૂંી ભાગ લેતા જઈએ કે છેલ્લે અનન્ત ઘટાડો કરવાથી જે રહે તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ. આ જે છેલ્લે અવિભાજ્ય જિંદુ રહ્યું તેનું નામ ભૂગિતિનું જિંદુ. એ જિંદુ તો કલ્પનાનું છે. કાંઈ પણ નિશાની મૂકી તો તેને તુરતજ મહત્ત્વ લાગું પડ્યું. માટે એ જિંદુ ખરેખર્ કહેતાં તો દર્શાવાય શકાયજ નહી. પણ આટલા ઉપરથી વિધાર્થીએ સુચનાઈને એમ ન ધારવું કે ભૂગિતિમાં તો કંઈ કલ્પનાના વિચારો છે. વ્યાખ્યાઓ તો શુદ્ધ ગણિતવિદ્યા પ્રમાણે આપવી જોઈએ; પણ એ જિંદુનો પ્રદાશ મન ઉપર પાડવા માટે તો એક કીર્ણ ટપકું વિચારવુંજ જોઈએ. એટલું યાદ રાખવું કે તે કલ્પિત છે, અને તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.

(૨). જિંદુ વિશે ઉપર પ્રમાણે સમજ આવી તો પછી લીટી નો વ્યાખ્યા પ્રમાણેનો વિચાર મનમાં સહેલથી ઉત્પન્ન થશે. એવાં અગણિત જિંદુઓ એકેકની જોડાનેડ એકજ દિશામાં આવેતો લીટી થાય; અથવા કલ્પનામાં એવું ધારીએ કે આવું એક ગણિતવિદ્યાનું જિંદુ અવકાશમાં ચલન પામીને એક રથલથી ખીજે રથલે મયું, અને તેના માર્ગ ઉપર આપણે નિશાની કરી

રખી તો આ માર્ગે તે લીટી થઈ. હવે એ તો સ્પષ્ટ છે કે આવેલ વિચાર લીટીનો લગ્નજો તો તેની લીટીને લગ્નાઈ માનજ છે; પહોળાઈ નથી. કારણ કે ગિંદુને પહોળાઈ નથી અને તેવું વગર પહોળાઈનું ગિંદુ એક સ્થલથી બીજે સ્થલે સીધું ચાલ્યું ગયું તો તે માર્ગને પહોળાઈ તો આવીજ નહિ. આ ગણિતશાસ્ત્ર પ્રમાણે લીટીની વ્યાખ્યા થઈ; અને તેનો વિચાર પણ કિપત્ર થઈ શક્યો. પણ આવી લીટી આપણે જોઈ શકતા નથી; અથવા દોરી પણ શકતા નથી. એવી લીટી પ્રત્યક્ષ જણાઈ શકતી નથી; કારણકે ગમે તેવી જીગી લીટી દોરીએ તેને કાંઈપણ જાણ્યું તો હોયજ. પણ જેમ એક ગિંદુ દર્શાવવા માટે ટાંપ મુકીયેતો આવે. તેમ કલિપત લીટીને માટે એક પાંતળી લીટી દોરીએ તો આવે.

(૩). આવી જે લીટીઓ એકેકો છેદેતો જે જગ્યાએ છેદે ત્યાં ગિંદુ હોવું જોઈએ, એ તો સ્પષ્ટ છે; અને ઉપર કહ્યું તેમ લીટી જે ગિંદુના વેગથી થતી હોય તો લીટીને જન્ને છેડે એટલે આરંભે અને અન્ને જે ગિંદુઓજ હોવાં જોઈએ. જે જે આપેલાં ગિંદુઓ વચ્ચે એક લીટી દોરીએતો તે સમર્થાદ કહેવાય. પણ જે તેમ કરતાં એક અથવા જન્ને જાણુએથી તે લીટી ગમે તેટલી લગ્નાઈ શકાય તો તેને અસર્થાદ લીટી કહેછે.

(૪). લીટી જે પ્રકારની હોઈ શકે; સીધી લીટી જેમકે અ; અને વક્ર લીટી અથવા આડી લીટી જેમકે ઘ. અડીટી તેના જે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી છે; એટલે



જે એક છેડે આંખ અડકાડીને તે લીટી નિશાએ જોઈયું તો તે

છેડેતું એક ગિંદુજ દેખાશે. બીજાં તે લીટીનાં ગિંદુઓ દેખાશે નહિ. પણ વ લીટી એવી નથી.

ટીપ્પ:-વિદ્યાર્થીએ એવી ભૂત કરવાનો સંભવ છે કે, એક કાગળ લખનાં કોઇ સીધી લીટીઓ લખી શકે છે, અને કોઈ વધારે કે ઓછી આડી લીટીઓ લખે છે, તેમ અલિંયાં પણ સીધી અને આડી લીટી વચ્ચે તફાવત હશે; પણ તેમ નથી, એ ખુબ ધ્યાનમાં રાખવું.

ઉપરથી આકૃતિઓ ઉપરથી જણાશે કે અ વાળી બંધી લીટીઓ સીધી છે; માત્ર વ આડી અથવા વક્ર છે.

“જે ગિંદુઓની વચ્ચે જે ટુંકામાં ટુંકું અન્તર તે સીધી લીટી” એવી કોઇ વાર સીધી લીટીનાં વ્યાખ્યા લખાય છે; તે પણ ખરી વ્યાખ્યા છે એવું જણાશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે જો જે અમર્યાદ સીધી લીટીઓ અવકાશમાં એવી રીતે મળે કે જન્મેની દિશા એકજ હોય, તો પછી તે બેમાંની કોઇપણ લીટી તે દિશા છોડીને નિરાળા દિશાએ જઇ શકશે નહિ; કારણ કે જો તેમ થાય તો સીધી લીટીની વ્યાખ્યાથી ઉલટું થાય.

અ ————— ક ————— વ

આ આકૃતિમાં અ અને વ સીધી લીટીઓ ક ગિંદુમાં એવી રીતે મળે છે કે તેમની દિશા સરખીજ છે તો તે બે મળીને એકજ લીટી થશે. હવે પછી એ બેમાંની એક લીટી બીજીની જૂની પડનાર નથી. એમ પણ સિદ્ધ થઇ શકે કે જો જે સીધી લીટીઓમાં જે ગિંદુ સાધારણ હોય તો તે બે સીધી લીટીઓ એકેકની ઉપરજ પડશે.

જે સીધી લીટીઓ એકેકને મળી ન જાય તો એકજ ગિંદુમાં

એકેકો છેદશે; એકથી વધારે જિંદુમાં છેદી શકે નહિ તે પણ દેખીતુંજ છે.

વ્યાખ્યા (૫-૭).

૫. જેને લંગાઈ અને પહોળાઈજ માત્ર હોય તેને સફાઈ કહે છે.
૬. સફાઈના છેડાઓ લીટીઓથી થયેલા હોયછે.
૭. સપાટ સફાઈ તેને કહેવી કે જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય; અથવા જેમાં કોઈ પણ બે જિંદુઓ લઈને એક જિંદુથી બીજા સુધી એક સીધી લીટી દોરિયે તો તે સીધી લીટી તે સફાઈની અંદરજ પડે અને બહાર જાય નહિ.

(૫) જેમ જિંદુના ચત્રનથી લીટી ની કક્ષનાનો નિશ્ચય થાય છે, તેમ લીટીના ચત્રનથી સફાઈની કક્ષના ગણી શકેછે. જે એક ગણિતવિદ્યાની રેખા ચત્રન પામે એમ ધારિયે અને જે અવકાશમાં તે ચત્રન પામે છે તેમાં કાંઈ નિશાની પડે, તો તે નિશાની એક સફાઈ દર્શાવશે. એ તો દેખીતુંજ છે કે જ્યારે લીટીને ફક્ત લંગાઈજ હોયછે અને જગાઈ કે પહોળાઈ હોતી નથી ત્યારે લીટીના ચત્રનથી જે સફાઈ ઉત્પન્ન થઈ તેને લંગાઈ તથા પહોળાઈજ હોઈ શકે; પણ તેને જગાઈ હોઈ શકે નહિ.

ધારો કે એક સીધી લીટી અથવા દોરી ચુનામાં અથવા ચાકમાં પત્રાળીને એક ટેવત્રના સપાટ ગથાળા ઉપર તેના જા-
ન્ને છેડા બેંચી રાખીને ફેરવિયે; તો તે ટેવત્રના ઉપર સફેદ રંગની આકૃતિ પડશે; એ એક સફાઈ થઈ; એને લંગાઈ પ-
હોળાઈ છે; પણ જગાઈ નથી.

(૬) વળી એ દોરી ગમે તેમ પકડીને ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ પાડી હોય તોપણ તે આકૃતિને છેડે તો લીટીજ યનવાળી.

(૭) જો એક સપાટ ટેંગણના મથાળા ઉપર ન ફેરવતાં એવી દોરી એક પૃથ્વીના ગોળા ઉપર ફેરવી હોય તોપણ એક સદ્દાષ્ટની આકૃતિ આવશે; પણ તે કાંઈ સપાટ સદ્દાષ્ટ થશે નહિ; ટેંગણ ઉપર યનાવેલી સદ્દાષ્ટમાં તો જે જિંદુઓ જોડીયું તો તે જોડનારી લીટી ટેંગણ ઉપરજ રહેશે; પણ આ ગોળા ઉપરની સદ્દાષ્ટમાં તો એવાં જે જિંદુઓ એક લીટીથી જોડીયું તો તે લીટી ગોળાની આંદરથી પડશે, અને ગોળાની સદ્દાષ્ટ ઉપર પડશે નહિ. આ ઉપરથી સદ્દાષ્ટ અને સપાટ સદ્દાષ્ટ વચ્ચેનો ફેર સમજ પડશે. જે સદ્દાષ્ટ સપાટ ન હોય તેને વક્ર સદ્દાષ્ટ કહે છે.

ટીપ:—કોઈપણ નક્કર પદાર્થ લઇએ તો તેના મહત્વના ત્રણ પરિણેય અથવા પ્રકાર હોય છે; (૧) લંબાઈ, (૨) પહોળાઈ, (૩) ઊંચાઈ અથવા જડાઈ. ધારો કે એક ચોપડી લીધી, તો તેને એ ત્રણ પરિણેય લાગુ પડશે. હવે એ ચોપડીને ટેંગણ ઉપર મૂકીને તેનું ઉપરનું સપાટ મથાળુંજ જોઈએ તો તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈજ દેખાશે; માટે તે સદ્દાઈ કહેવાય; પણ જોગ નહિ સમજવું કે તે ચોપડીનું પુરું ફાડી લીધું તો તે સદ્દાઈ થશે; કારણ કે તેને જરાપણ જડાઈ હશેજ; એટલે તે તો નક્કર પદાર્થ થયો. પણ જડાઈ ન વિચારતાં ફક્ત પુઠાના ઉપલા ભાગની આકૃતિનોજ કદપનામાં વિચાર કરિયે તો તે સદ્દાઈ. જોજ સદ્દાઈને છેડે ચાર લીટીઓ આવી, તે લીટીઓનો પણ કદપનાથી એવો વિચાર કરવો કે તેને લંબાઈજ છે; પણ જડાઈ અથવા પહોળાઈ નથી તો તે ગણિતની લીટી થઈ; અને જે ખૂણે લીટીઓ મળે છે તે જિંદુઓ થયાં.

આ ઉપરથી જણાશે કે,

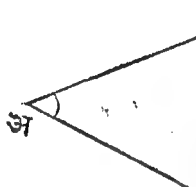
૧. નક્કર પદાર્થ દેખીતો છે અને તેને લંબાઈ, પહોળાઈ, તથા જડાઈ ત્રણે હોય છે.

૨. સફાઈ કલ્પનાથી વિચારાય છે; અને તેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ જેજ હોય છે; જડાઈ હોતી નથી.

૩. લીટી કલ્પનાથી વિચારાય છે; અને તેને એકલી લંબાઈ જ હોય છે.

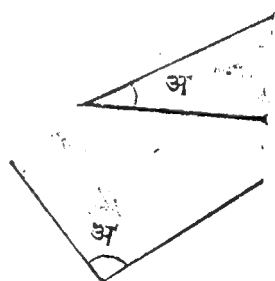
૪. ગિંદુ કલ્પનાથી વિચારાય છે; અને તેને કોઈ પણ જાતનું મહત્ત્વ હોતું નથી.

વ્યાખ્યા (૮-૯).



૮. જે લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય પણ એકજ દિશામાં ન હોય તો એવી જે લીટીઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝાંકને સમતલ સૂળો કહે છે.

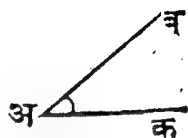
૯. જો જે સીધી લીટીઓ ઝાંકેક સાથે એકજ સફાઈમાં મળે, પણ એકજ દિશામાં જોડાઈ જતી ન હોય, તો તેઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝાંકને સમતલ સીધીલીટીસૂળો કહે છે.



૮ મી વ્યાખ્યામાં કહેલો ખૂણો આ ભૂગિતિમાં વપરાતો નથી; અને ૯ મી વ્યાખ્યા પ્રમાણે સીધી લીટીઓથી યથલે ખૂણોજ વપરાય છે, માટે ધર્મ કરીને એને માત્ર “ખૂણા” કરીનેજ

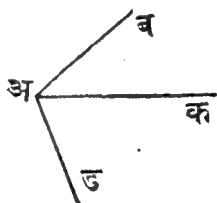
કહેવામાં આવેછે; અને “ ખૂણો ” શબ્દ લખ્યો હોય ત્યારે હવેથી “ સમન્વય સીધી લીટી ખૂણો ” સમજવો.

જે બે લીટીઓ મળવાથી એક ખૂણો થાય તે લીટીઓને તે ખૂણાની બાજુઓ કહેવી; જેમકે અ ખૂણો છે; તેની અક અને અવ બાજુઓ છે. એ તો દેખીતું જ છે કે



એ બાજુઓ આ આકૃતિમાં છે તે કરતાં ગમે એટલી વધારે લાંબી અથવા ટુંકી દોરી હોય તો ખૂણાના કદમાં કંઈ ફેર પડતાર નથી; માટે યાદ રાખવું, કે લીટીઓ ન્હાની મ્હોટી હોય તે ઉપર ખૂણાના પરિમિતનો આધાર નથી.

જે બિંદુએ બન્ને બાજુઓ મળેછે તેને ખૂણાનું શિરોબિંદુ કહેછે, અને કોઈ કોઈ વાર તે બિંદુના નામથીજ ખૂણો દેખાડાયછે; જેમકે અ ખૂણો; પણ જો અ આગળથી બેથી વધારે લીટીઓ મળે તો તો એકથી વધારે ખૂણા થાય; જેમકે આ આકૃતિમાં અ



બિંદુ આગળ ત્રણ ખૂણા થયલા છે; (૧) અવ અને અહ લીટીઓ વચ્ચે; (૨) અવ અને અક લીટીઓ વચ્ચે; અને (૩) અક અને અહ લીટીઓ વચ્ચે; એમાંનો પહેલો ખૂણો બીજા બેના સરવાળા બરાબર છે. હવે એ બધાને તો અ ખૂણા કરીને કહેવાયજ નહિ; કારણ કે ત્રણ જૂદા જૂદા પરિમિતના છે. અને જૂદી જૂદી લીટીઓથી થયલા છે; માટે ખૂણાઓ દેખાડવા સાર એવી ગોઠવણ કરી છે કે જે ખૂણાઓ વચ્ચે મુત્યવશ પડે નહિ. તે એ કે દરેક ખૂણો એક અક્ષરથી નહિ પણ ત્રણ અક્ષરથી દેખાડવો; તેમાં શિરોબિંદુનો અક્ષર વચ્ચેમાં મૂકવો; અને આસપાસ જે બાજુઓ ઉપર લખેલા અક્ષરો મૂકવા; જેમ કે:-

- (૧) અવ અને અડ વચ્ચેનો ખુણો તે અડ અથવા અવ.
- (૨) અવ અને અક વચ્ચેનો ખુણો તે અક અથવા અવ.
- (૩) અક અને અડ વચ્ચેનો ખુણો તે અડ અથવા અક.

જે સીધી લીટીઓ એકજ સદાષઠમાં હોય તે તેઓને લંબાવતાં તેઓ મળે તો:-

(૧) જે તેઓની દિશા એકજ હોય તો મળ્યા પછી જે મળીને એકજ લીટી થશે; પણ:-

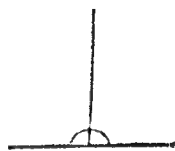
(૨) જે તેઓની દિશાઓ જુદી હોય તો જે પિંદુ આમળ મળે ત્યાં એકેકને છેદશે. એક વખત છેદ્યા પછી ફરીથી તો છેદશે નહિજ, એ તો પ્રત્યક્ષ છે. હવે જ્યાં છેદે છે ત્યાં તે જે લીટીઓ વચ્ચેની વક્રતા અથવા તેઓની વચ્ચેનો ઝાંક અથવા ગાળો તેને ખૂણો કહે છે. આ ઉપરથી જણાશે કે જે સીધી લીટીઓ એકજ સદાષઠમાં હોય પણ દૂર દૂર હોય તો તેમને લંબાવ્યા પછી એકેકને મળશે ત્યાં જે ખૂણો થાય તે તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો સમજવો.

એવી જે લીટીઓ વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો ન્હાનો હોય તેમ ખૂણો પણ મ્હોટો ન્હાનો થશે; અને ખૂણાના કદનો આધાર તે ઉપરજ રહેશે. જામ્નૂઓ ગમે એટલી લાંબી હોય પણ પાસે પાસે હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો ન્હાનો થશે; પણ આ જામ્નૂઓ ગમે એટલી ન્હાની હોય, પણ તેમની વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો હોય, એટલે તે જામ્નૂઓ દૂર દૂર હોય તો, તેમની વચ્ચેનો ખૂણો મ્હોટો થશે.

૦યાખ્યા (૧૦-૧૨).

૧૦. જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટીને

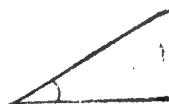
એવી રીતે મળે કે પાસ પાસેના બે ખૂણા-
ઓ ખરોખર થાય, ત્યારે
આ ખૂણાઓ માંહેલા
પ્રત્યેકને કાટખૂનો કહે-
છે, અને આ લીટીઓ-
માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એમ
કહેવાય છે.



૧૧. જે ખૂણો કાટ ખૂણા કરતાં
મોટો તે પહોલો ખૂનો.



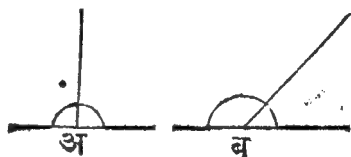
૧૨. જે ખૂણો કાટખૂણા કરતાં
ન્હાનો તે સાંકડો ખૂનો.



કોઇ ખૂણો ન્હાનો હોય અને કોઇ મોટો હોય, એટલે
ખૂણાના પરિમિતમાં ભાગો છે, એવો દેખીતું છે; હવે વિચારવાનું
એ રથું કે એક ખૂણો કેટલો મોટો છે તે શી રીતે જતાવાય ?
એક લીટી કેટલી ન્હાની કે મોટી છે તે તેમાં કેટલા તસુ અથ-
વા ડુટ અથવા ગજ છે તે કલ્યાણી સમજશે; એક ચોપડી કેટલી
બારે છે તે કેટલા તોલા અથવા શેર છે તે કલ્યાણી સમજશે.
હવે ખૂણાનું પરિમિત જાણવા સાર આપણે શું પરિમાણ લેવું
જોઈએ ? જો એક એવો ખૂણો હોય કે તેનું પરિમિત હમેશાં
નિશ્ચિત અને એકજ સરખું રહેવું હોય અને બદલાવું ન હોય
(જેમકે લંબાઈમાં એક ડુટ, વજનમાં એક શેર) તો તેને
અમુક નામ આપીએ; તે પગી બીજા બધા ખૂણાઓનું તે
ખૂણા ઉપરથી પરિમિત કઢાડીએ; એવો એક ખૂણો સહે-

જમાં ધ્યાનમાં આવશે. તમારા ઝોરડાની જે પાસ પાસેની ઉભી દીવાલો વચ્ચેનો ખૂણો; તમારી ચોપડીની અથવા આ પૃષ્ઠની લાંબાઈ અને પહોળાઈની વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને જમીન વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને ‘સીલિંગ’ (છત) વચ્ચેનો ખૂણો; સુતાર અથવા કડિયો લાકડાંની જે ચીપોથી બનાવેલો ખૂણો વાપરે છે તે; જે બધા ખૂણા એકજ પરિગિતના છે, એ તો સહેજ જણાશે. જે તમને એ વિશે શક હોયતો સ્નેહનો જે ચોકઠાં વચ્ચેનો ખૂણો ઝોરડાની જે ભીંતો વચ્ચેના ખુણા બેડે મેળવે તો તમને જણાશે કે એ બન્ને ખૂણાઓ સ્થાનોપરી છે; એટલે અકેક ચોકડું અકેક ભીંતની સાથે વળગી જશે; માટે ભીંતો અને ચોકઠાં વચ્ચેના (ગાળા) ખૂણા પણ સરખાજ હોવા બેઠગો. આવો નિશ્ચિત ખૂણો તે કાટખૂણો; એવા એક કાટખૂણાના ૯૦ સરખા ભાગ કરિયે તો દરેક ભાગને એક અંશ કહે છે. જે વ્યાખ્યા ઉપર

આપી છે તે આ પાસેની આકૃતિઓ બેતાં ખરી અને વાસ્તવિક છે એવું

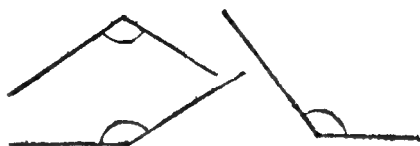


જણાશે. દર આકૃતિમાં બન્ને ખૂણા ખરોખર છે અને દરેક ખૂણો દેખીતોજ કાટખૂણો છે; બ આકૃતિમાં ખૂણા ન્હાના મ્હોટા છે; અને તેમાંનો એક કાટખૂણો નથી; દેખીતી રીતે એક કાટખૂણા કરતાં ન્હાનો, અને ખીજો મ્હોટો છે.

(૧) કાટખૂણો હમેશાં એકજ નિશ્ચિત પરિગિતનો છે; માટે તેના એક સરખા ૯૦ ભાગ કીધા છે; એટલે દરેક કાટખૂણામાં ૯૦ અંશ હોવા બેઠગો.



(૨) પરાળો ખૂ-
લો કાટખૂણા કરતાં
મોટો છે, માટે તેમાં
૯૦ થી વધારે અને
૧૮૦થી ઓછા અંશ
હોવા જોઈએ.



(૩) સાંકડો ખૂણો
કાટ ખૂણા કરતાં ન્હાનો
છે માટે તેમાં ૦ થી
વધારે અને ૯૦ થી
ઓછા અંશ હોવા જોઈએ.



ટીપ્પણી:—(૧) જે ખૂણો કાટખૂણો ન હોય તેને (એટલે પ-
હોળા અને સાંકડા બન્ને ખૂણાને) તિર્યકકોણ કહેવો જોઈએ:—

ચમડ અને ડમડ જે બન્ને કાટ ખૂણા છે;

કમચ, કમડ જે બન્ને (સાંકડા) તિર્યકકોણ છે;

કમડ જે પણ (પહોળા) તિર્યકકોણ છે.



(૨) જે કાટખૂણા એટલે ૧૮૦ અંશ
એથી વધારે પણ ખૂણો થઈ શકે; પણ એવા ખૂણા મુ-
કિલકના અન્યમાં વાપરવામાં આવ્યા નથી.

વ્યાખ્યા—(૧૩-૧૪).

૧૩. કોઈ વસ્તુનો છેડા તે તેની સીમા અથવા મર્યાદા.

૧૪. જે સફાઈની એક અથવા વધારે લીટીઓથી
હદ થઈ ગઈ હોય તે સફાઈને આકૃતિ કહે છે.

વ્યાખ્યા ૧૩ માં

ધણી ઉપયોગી નથી.

જે સફાઈ અ-

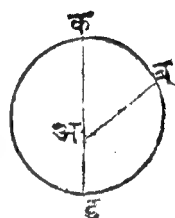
નન્ત ન હોય તે આકૃતિ થઈ.



એક આકૃતિને હદ કરનારી બધી લીટીઓની લંબાઇનો સરવાળો લઘયે તો તેને પરિમિતિ કહે છે.

૦ચાખ્યા (૧૫-૧૯).

૧૫. એક સપાટ આકૃતિ જેની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટી-થી થયેલી હોય અને જેમાં એક એવું મુકરર બિંદુ હોય કે તે બિંદુમાંથી તે વક્ર લીટી સૂઝી જે સઘળી



સીધી લીટીઓ દારિયે, તે બરોબર થાય તો તે આકૃતિને એક વર્તુલ કહેવો; અને તે વક્ર લીટીને પરિઘ કહેવો.

૧૬. જે બિંદુમાંથી આવી સરખી સીધી લીટીઓ દારાય છે તેને તે વર્તુલનું મધ્યબિંદુ કહે છે.

૧૭. જે સીધી લીટી એક વર્તુલમાં તેના મધ્ય બિંદુમાં થઇને પાર જાય, અને જેના બે છેડાઓ પરિઘ ઉપરજ આવી મળે, તેને તે વર્તુલનો વ્યાસ કહે છે.

૧૮. ૦યાસ અને તેનાથી કપાયેલા પરિઘના ભાગ વચ્ચે વર્તુલનો જેટલો ભાગ આવે તેને અર્ધવર્તુલ કહે છે.

૧૯. હરકોઈ સીધી લીટી વર્તુલમાં દારી હોય તો તે સીધી લીટી અને કપાયેલા પરિઘ વચ્ચેના ભાગને વર્તુલનો ક્ષંડ કહે છે.

ટીપ:—મધ્ય બિંદુમાંથી જે સરખી સીધી લીટીઓ દારી, તેને ત્રિજ્યા કહે છે.

(૧) એકજ વર્તુલની બધી ત્રિજ્યાઓ સરખી હોવી જોઈએ.

(૨) એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યા તેના વ્યાસની અડધી હોવી જોઈએ.

(૩) એકજ વર્તુલના બધા વ્યાસો સરખા હોવા જોઈએ.

(૪) એક વ્યાસથી વર્તુલના બે સરખા ભાગ થઈ જાય છે; કારણ કે એવા બે ભાગ એકેક ઉપર જોડવાને મૂક્યું તો સ્થાનો-પરી થશે; એટલે સરખી જગ્યા રોકશે; ગાંઠે દરેકને અર્ધ-વર્તુલ કહેશે.

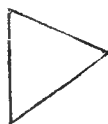
વર્તુલની વ્યાખ્યા ઉપરથી વર્તુલ કેમ દોરવો તેની સમજ પડશે. એક દોરી લઈને તેનો એક છેડો પાટીયા ઉપર આંગળીથી દબાવી રાખવો, પછી તે દોરી ખેંચીને તેને ખીજે છેડે ચાકનો કટકો જોરમાં પકડી રાખવો; હવે જો પહેલો છેડો અચળ રાખીને એટલે દાબી રાખીને ચાકવાળો છેડો ફેરવીશું તો વર્તુલની આકૃતિ આવશે. એમાં દાખેલો છેડો તે મધ્યગિંદુ, દોરીની લંબાઈ તે ત્રિજ્યા. અને ચાકની ગોળ લીટી તે પરિધ, અને એ લીટી વચ્ચે આવેલો પાટીયાનો કાળો ભાગ તે વર્તુલ થયાં. (યાદ રાખવું કે પરિધ અને વર્તુલ જુદાં છે; પરિધ તો માત્ર એક લીટી; અને વર્તુલ તો લીટીથી મર્યાદા થયેલી સદાશ; ચાકની નિશાની તે પરિધ; અને પાટીયાનો ભાગ તે વર્તુલ). ઉપલી આકૃતિમાં અ મધ્યગિંદુ છે; અચ, અક, અને અડ, ત્રિજ્યાઓ, અને કડ વ્યાસ છે; ચકડ લીટી પરિધ; અને તેના અંદરની સદાશ તે વર્તુલ.

વ્યાખ્યા (૨૦—૨૩).

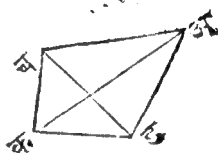
૨૦. જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી

થયત્રી હોય છે તેને સીધી લીટીઆકૃતિ કહે છે.

૨૧. જે સીધી લીટી આકૃતિની હદ ત્રણ સાધી લાટીઓથી થઈ હોય તેને ત્રિકોણ કહે છે.



૨૨. જેની હદ ચાર સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને ચતુર્ભુજ કહે છે. ચતુર્ભુજના આકૃતિના સામસામેના ખૂણાઓનાં



શિરોબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટીઓ (જક અને વડ) ને તેની કર્ણ લોટીઓ કહે છે.

૨૩. જેની હદ ચારથી વધારે સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને વહુકોણ કહે છે.



જે સીધી લીટીઓથી એક સીધીલીટીઆકૃતિ થઈ હોય તે દરેક લીટીને તે આકૃતિની બાજુ કહે છે. યાદ રાખવું કે એવી એક આકૃતિને જેટલી બાજુઓ હોય તેટલાજ ખૂણા પણ હોવા જોઈએ.

ત્રણ કરતાં ઓછી સીધી લીટીઓથી કોઈ પણ આકૃતિ બની શકતી નથી; માટે જ્યાં આકૃતિઓમાં ત્રિકોણ પહેલો અને જ્યાંનું મૂળ સમજવો. વળી કેમ પણ આકૃતિના ત્રિકોણ તુરત બની શકે છે; જેમકે ૨૨ મી વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં એક ચતુર્ભુજના આકૃતિના એ બે ત્રિકોણો અલગ અને અલગ થયા; માટે ત્રિકોણના શુણ્ણ વિશે સારું જ્ઞાન મળે તો તે ઉપરથી બીજી આકૃતિઓના શુણ્ણની સમજણ સારી મળે; પહેલા સંકેતના ધ્યાન પરના બાગમાં ત્રિકોણના શુણ્ણ વિશેજ વિચાર કરીએ છે.

પાંચ બાજુના બહુકોણને પંચકોણ, છતાંને ષટ્કોણ, સાતતાંને સપ્તકોણ, આઠતાંને અષ્ટકોણ ઇલાદિ કહે છે.

વ્યાખ્યા (૨૪—૨૯).

૨૪ જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

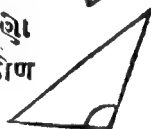
૨૫. જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજુઓ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

૨૬. જેની કોઈ પણ બે બાજુઓ સરખી ન હોય તેને વિષમ બાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

૨૭. જે ત્રિકોણમાં એક કાટખૂણો હોય તેને કાટખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.

૨૮. જેમાં એક પહોળો ખૂણો હોય તેને પહોળાખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.

૨૯. જે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા સાંકડા હોય તેને માંકડાખૂણ ત્રિકોણ કહેવો.



ઉપલી છ વ્યાખ્યાઓમાંથી પહેલી ત્રણ ત્રિકોણની બાજુઓ સરખાવતાં થઈ છે; અને છેલ્લી ત્રણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ સરખાવતાં થઈ છે.

જેમ જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સરખી હોય તેને સમ-બાજુ કહેછે, તેમજ જેના ત્રણ ખૂણા સરખા હોય તેને સમ-ખૂણ કહેછે. આગળ ચાલતાં જણાશે કે જે ત્રિકોણની ત્રણ

બાજુઓ સરખી હોય તેના ત્રણ ખૂણા પણ સરખા હોવાનું જોઈએ.

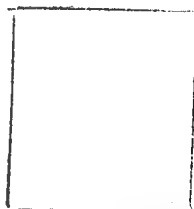
દેખીતું છે કે (૨૫) મી વ્યાખ્યામાં કહેલા ત્રિકોણના સમગ્ર ગુણો (૨૪) મી વ્યાખ્યાવાળા ત્રિકોણને લાગુ પડવાનું જોઈએ. આગળ ચાલતાં જણાશે કે એક ત્રિકોણમાં કાટખૂણો એકજ હોઈ શકે, અને પહોળા ખૂણો પણ એકજ હોઈ શકે. જો એ કાટખૂણા અથવા પહોળા ખૂણા આવે એવો એક ત્રિકોણ દોરવા યત્ન કરશો તો તેમ દોરાશે નહિ.

યાદ રાખવું કે એક અથવા બે સાંકડા ખૂણા કોઈ ત્રિકોણમાં હોય તો તેને સાંકડાખૂણું ત્રિકોણ કહેવાય નહિ. કારણ કે કાટખૂણું અને પહોળા ખૂણું ત્રિકોણોમાં પણ બે ખૂણા તો સાંકડાજ આવેછે. માટે જે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાંકડા તેજ સાંકડાખૂણું ત્રિકોણ.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ પોતપોતામાં સરખી નહોય, પણ એકની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણો અરસ્પરસ સમબાજુ છે એમ કહેવું.

વ્યાખ્યા (૩૦-૩૪).

૩૦. ચતુર્કોણાકૃતિઓમાં જેની ચારે બાજુઓ સરખી હોય અને બધા ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેને ચોરસ કહે છે.



૩૧. જે ચતુર્કોણાકૃતિના બધા ખૂણા કાટખૂણા

હોય પણ બધી બાજુઓ સરખી ન હોય તેને કાટખૂણ ચતુર્કોણ કહેવો.



૩૨. જે ચતુર્કોણાકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી હોય પણ તેના ખૂણા કાટખૂણા ન હોય તેને સમવાજૂ ચતુર્કોણ કહેવો.



૩૩. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બધે બાજુઓ સરખી હોય, પણ જેની ચારે બાજુઓ સરખી ન હોય અને જેના ખૂણાઓ પણ કાટખૂણા ન હોય તેને રામ્બાઇડ કહે છે.



૩૪. બીજી બધી ચતુર્કોણાકૃતિઓને વિષમવાજૂ ચતુર્કોણો કહેવા.



ચોરસની વ્યાખ્યામાં એટલું જ કહિયે તો પણ ચાલે, કે તેની ચારે બાજુઓ સરખી હોવી જોઈએ, અને એક ખૂણા કાટખૂણા હોવો જોઈએ; કારણ કે આગળ ચાલતાં જણાશે કે ચારે બાજુઓ સરખી હોય અને એક ખૂણા કાટખૂણા હોય તો બીજા બધા પણ કાટખૂણાજ હોવા જોઈએ.

કાટખૂણુ ચતુર્કોણના નામ ઉપરથીજ જણાશે કે તેમાં બધા ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ; પણ બાજુઓ અવશ્ય સરખીજ હોવી જરૂરની નથી.

તેજ પ્રમાણે સમવાજૂ ચતુર્કોણનો અર્થજ એ છે કે તે

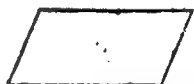
ચતુર્કોણની ચારે બાજુઓ સરખી છે; પણ તેના ખૂણા બધા સરખા અથવા કાટખૂણા હોવાની જરૂર નથી.

રામ્યાષ્ટ શબ્દ ઈમેજ ઉપરથીજ લીધો છે; કારણ કે ફક્ત સામસામેની બેજ બાજુઓ સરખી હોય એવી ચતુર્કોણ-કૃતિને માટે એક શબ્દ આપણી બાધમાં સહેલથી થઈ શકતો નથી. પણ એ આકૃતિ “ સમાન્તરબાજુ ચતુર્કોણ ” જેની વ્યાખ્યા આગળ આપી છે, તેજ આકૃતિ છે; અને આગળ ચાલતાં સિદ્ધ થશે કે તે બે એકજ આકૃતિનાં નામો છે; માટે એ ઈમેજ શબ્દની જગ્યાએ તે શબ્દ બધે વાપરવામાં આવશે.

વ્યાખ્યા (૩૫-૩૬).

૩૫. જે એકજ સદ્ધર્મમાં બે સીધી લીટીઓ એવી હોય કે તેઓને બન્ને દિશાએ ગમે તેટલીવધારિયે તોપણ કદી મળે નહિ તો તેને સમાન્તર સીધી લીટીઓ કહેવી.

૩૬. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બે બાજુઓ સમાન્તર હોય તેને સમાન્તરબાજુચતુર્કોણ કહેવા.



સમાન્તર લીટીઓ એકજ સદ્ધર્મમાં હોવી જન્યએ; કારણ કે બે જુદી સદ્ધર્મમાં તો બે લીટીઓ એવી હોઈ શકે કે તે એકેકને મળેજ નહીં; પણ તે કાંઈ સમાન્તર ન કહેવાય. ૩૦-૩૧-૩૨-૩૩ વ્યાખ્યાવાળી આકૃતિઓનો સમાવેશ ૩૬ માં થયેલો છે; એટલે ઉપર કહેલી બધી આકૃતિઓ સમાન્તર બાજુ-ચતુર્કોણ છે એમ સિદ્ધ થશે.

સ્વીકૃત કૃત્યો.

૧. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈ પણ એક બિંદુથી કોઈપણ બીજા બિંદુ સૂધી એક સીધી લીટી દારી શકાય છે.
૨. એવું સ્વીકારેલું છે, કે અન્તવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સૂધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.
૩. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈપણ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને તે મધ્ય બિંદુથી કોઈપણ અન્તરે એક વર્તુલ દારી શકાય છે.

સમજણ.

આ વિષયની જરોજર સમજણ પહેલાંથીજ લેવી ધણી અગત્યની છે; માટે માત્ર એ ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો મહોડે કરવાથી કામ થયું એમ વિદ્યાર્થીએ બનણવું નહિ; પણ આ સમજણ જરા ઠકણ લાગે તોપણ ધ્યાનથી સમજ્યા શિવાય આગળ વધવું નહિ. એ જરોજર સમજ પડવા માટે નીચલા સવાલોનો વિચાર કરવાનો છે.

- (૧) સ્વીકૃત કૃત્યો એટલે શું? અને એમ સ્વીકારવાનું કારણ શું?
- (૨) યુક્તિહે માત્ર કેટલું સ્વીકારવા માગ્યું છે?
- (૩) એ ત્રણ શિવાય કોઈ કૃત્યો સ્વીકારાયલાં છે કે કેમ? એ સવાલોના જવાબ:—

૧ વિદ્યાર્થીને આગળથી ખબર તો હશેજ કે એ હજારથી વધારે વર્ષો થયાં યુક્તિહની જૂગિતિનો આચરૂપૂર્વક અભ્યાસ

જેટલા માટે કરવામાં આવે છે કે એજ એકલા શાસ્ત્રમાં તર્ક-
શાસ્ત્રના નિયમોને જરોજર દઢતાથી અનુસરવામાં આવે છે,
અને સિદ્ધાંતો એવી રીતે સાબિત કરવામાં આવ્યાં છે કે આ-
ગલા એકાદ સિદ્ધાંતમાં ન સાબિત કર્યું હોય એવું કોઇ પણ
સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતું નથી. હવે ત્રણ કૃત્યો એવાં
છે કે તે માગી લીધેલાં છે; અને તે જો આપણે ન સ્વીકારીએ તો
સિદ્ધાંતોનો પુરાવો આપી શકાય નહિ. એ ત્રણ કૃત્યો તેજ ઉપર
લખેલાં ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો છે. એ જેટલાં સહેલાં છે કે તુરંતજ
સ્વીકારી શકાય.

(૨) એ કૃત્યો જરોજર તપાસવાં જોઇએ; અને જેટલું
માગેલું છે તેટલુંજ આપવું; તેથી વધારેની જરૂર નથી. પહે-
લાંમાં એમ માગેલું છે કે જે જિંદુઓ એકજ સંપ્રદાયમાં હોય
તો એક જિંદુથી બીજા સુધી લીટી દોરવાની જેટલે કે તે
જિંદુઓને એક લીટીથી સાંધવાની છુટ છે; જો અ અને વ
અઃ
જે જિંદુઓ હોય તો જરૂર પડે
તેઓની વચ્ચે અ થી વ સુધી એક લીટી દોરી શકાય, જેટલું
માગી લીધું છે. બીજાં સ્વીકારાયેલાં કૃત્યમાં એમ કહેલું છે કે
જો જરૂર પડે તો એક આપેલી હદ થયેલી અથવા લીટી બેમાંથી
ગમે તે — અ — વ — બાજુએ લંબાવાઈ શકાય.
પણ યાદ રાખવું કે આપણે એમ સ્વીકારતા નથી કે આટલી
અમુક લંબાઈ સુધી લંબાવાય; એમ ન કહેવાય કે અથવા લીટીને
ચાર ઇંચ લંબાવો; અથવા કોઇ કાઢ લીટી જેટલી લંબાવો.
જો આપણે સ્વીકારતા નથી; પણ જેટલુંજ, કે અથવા લીટી સમ-
વાદ જેટલે જાને છેડે હદ થયેલી લીટી છે તેને એક અથવા જાને
દિશાએ અગર્યાદ કરી શકાય. પહેલાં અને બીજાં સ્વીકૃત
કૃત્યો કયા સાધનથી થઇ શકે તે જોવાથી વધારે સમજ પડશે.

એ જન્મે સાધારણ વગર નિશાની કરેલી આંકણીથી થઈ શકે; એક એવી આંકણીથી એ ગિંદુ પણ સંધાઈ શકે અને એક લીટી ઉપર આંકણી મૂકીને કલમ ચલાવિયે તો જન્મે જાતુએ તે લીટી લંગાવામ પણ શકાય. ઉપર “વગર નિશાની કરેલી” એવા શબ્દો વાપરવાનું કારણ એ કે એક નિશાની કરેલો કુટ અથવા ગજ લમ્બએ તો લીટી દોરાય અને લંગાવાય એટલુંજ નહિ, પણ અમુક લંગામ જેટલી પણ કરી શકાય. પણ તેવું કાંઈ યુક્તિએ પોતાની ભૂગિતિના સિદ્ધાંતોના પુરાવા માટે માગ્યું નથી. ત્રિજ્યામાં એટલુંજ માગી લીધું છે કે એક આપેલી લીટીના એક છેડાને મધ્યગિંદુ ધારીને અને તે લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને એક વર્તુલ દોરી શકાય. આ આકૃતિ બતાવવા સાર એક કમ્પાસ (કર્કટ) ની જરૂર છે. પહેલાં કમ્પાસનું એક આણી મધ્યગિંદુ ઉપર મૂકીને અચલ રાખવું, પછી બીજી આણી આપેલી લીટીને બીજે છેડે મૂકીને તે આણી ફેરવવું; તે આણી ફરીને પાછું અસલ જગ્યાએ આવશે કે જરાગર વર્તુલાકૃતિ થઈ રહેશે, યાદ રાખવું કે યુક્તિએ એમ માગ્યું નથી કે ત્રિજ્યા અમુક લંગાઈ (પાંચ ઇંચ, દશ ઇંચ) ની હોવી જોઈએ; પણ એટલુંજ કે એક આપેલી લીટીના મને તે એક છેડા મધ્ય ગિંદુ માટે લેવો; અને તેજ લીટીના લંગામ તે ત્રિજ્યા. યાદ રાખવું કે સાદી આંકણીથી પણ કોમ અમુક લંગામ જેટલી લીટી દોરી શકાય અને સાધારણ કમ્પાસથી પણ કોમ અમુક ત્રિજ્યાનો વર્તુલ દોરી શકાય, પણ તેવી રીતે એ સાંધનો વાપરવાની જરૂર નથી, કારણ કે તેટલું કાંઈ યુક્તિએ પુરાવા માટે માગ્યું નથી.

(૩) જે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકારવાં છે તે ઉપરાંત બીજાં પણ એક બે એવાં કૃત્યો સ્વીકૃત હોય એમ યુક્તિએ ગણ્યાં છે. તે એણે આ બેમાં લખ્યાં નથી તેનાં બે કારણો હશે; એક તો એ કે તે

કવચિતજ વપરાય છે; ખીચું એ કે તે એટલાં સ્પષ્ટ છે કે તે માગી લેવાની જરૂર જણાઇ નહિ હોય. પણ તેવાં કાંઇ ઠેકાણે આવે ત્યારે શું ચવણુ પડે નહિ અને વળી તે શું છે તે આગળથી જણાય, માટે તે અદિયાં આપ્યાં છે. તે સમજવાં સહેલ છે.

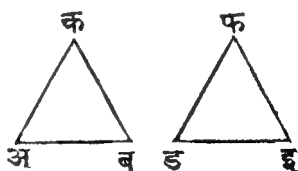
૧. કોઈપણ સદાચમાં એક ગિંદુ ગમે ત્યાં લેવું હોય તો લઇ શકાય.

૨. એ લીટીઓ હોય તો તેમાંની એક લીટી ઊંચકીને ખીચી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એક લીટીનો એક છેડો ખીચી લીટીના એક છેડા સાથે મળી જાય, અને ઊંચકેલી લીટી ખીચી લીટીના ઉપર એવી રીતે પડે કે તેને ઢાંકી નાખે.

૩. એક ખૂણા ઊંચકીને ખીજા ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું શિરોગિંદુ ખીજાના શિરોગિંદુ ઉપર પડે અને ઊંચકેલા ખૂણાની એક બાજુ પડેલા ખૂણાની એક બાજુને ઢાંકી નાખે.

એક આકૃતિને ઊંચકીને ખીચી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું એક ગિંદુ ખીચી

એક ગિંદુ ઉપર પડે અને એ બન્ને ગિંદુઓમાંથી નિકળતી લીટીઓ એકેકના ઉપર પડે.



જેમકે અબક અને ડહફ એ

ત્રિકોણ છે; તેમાં અબક ને ઊંચકીને ડહફ ઉપર એવી રીતે મૂકે કે અ ગિંદુ હ ઉપર પડે, અને અબ લીટી ડહ લીટી ઉપર પડે. (પહેલા સંધના ચોથા સિદ્ધાંતમાં આ કૃત્ય વાપરેલું છે.)

અત્યંત પ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે, તેઓ અસ્પર્શ બરોબર છે.
૨. જે સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે, તે સર્વાળા સમ થશે.
૩. જે સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તે બાકી સમ રહેશે.
૪. જે વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે તે સર્વાળા વિષમ થશે.
૫. જે વિષમ પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તે બાકી વિષમ રહેશે.
૬. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોની બમણાઈ બરોબર છે.
૭. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોના અર્ધો બરોબર છે.
૮. જે પરિમિતો એકેક ઉપર મૂકતાં અસ્પર્શ મળી જાય છે અથવા અવકાશમાં એકજ જગ્યામાં બરોબર માંડ રહે છે તેઓ બરોબર છે.
૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું છે.
૧૦. જે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.
૧૧. સમજા કાટખૂણા બરાબર છે.
૧૨. જે એક સીધી લીટી જે બીજી સીધી લીટીઓને એવી રીતે મળે કે તેની એક બાજુના જે માંહેલા ખૂણાઓનો સર્વાળો જે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય તે જે

બાજૂભણી જે કાટખૂણા કરતાં ઓછા સર્વાળાવાળા ખૂણા છે તે બાજૂભણી એ જે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તેા તેઓ મળશે.

સમજણ.

આપણે ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં કહી ગયા છિયે કે યુક્તિએ સિદ્ધાંતોની સાગિતીમાં પુરાવાના કડિન નિયમોને એમ દૃઢપણે સ્વીકારેલા છે કે આગલા સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીપૂર્વક સાગિત ન થઇ હોય એવી કોઇ પણ હકીકત ત્યાર પછીના સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતી નથી. હવે કેટલાંક પ્રમાણો એવાં દેખીતી રીતે સત્ય છે કે તેમની સત્યતા સાગિત કરવા માટે વધારે સહેલાં પ્રમાણો મળી શકતાં નથી; જેમકે અનું વજન બનાવજન યરોગર છે; અને કનું વજન પણ બની યરોગર છે; તેજ અનું વજન કની યરોગર થશે. આ પ્રમાણ પ્રત્યક્ષ એટલે વગર સાગિતીએ ખરું જ છે, એમાં કાંઇ શક નથી. માટે “પ્રત્યક્ષપ્રમાણ” નો અર્થ તેા આ ઉદાહરણ ઉપરથી સમજાયે હશે.

ભૂગિતિવિદ્યાનો આધાર થેડાંક આવાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો જેની સત્યતા દેખીતીજ છે તેના ઉપર રહેલો છે.

પ્રત્યક્ષ પ્રમાણમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમો પ્રમાણ નિયેનાં ત્રણ લક્ષણો આવશ્યક હોવાં જોઇએ.

(૧) તેની સત્યતા દેખીતીજ હોવી જોઇએ.

(૨) તેની સત્યતાનો આધાર તેના કરતાં કોઇ વધારે સહેલી સત્યતા ઉપર રહેલો જોઇએ નહિ.

(૩) જીજ્ઞ પ્રતિમાઓની સત્યતાનો પુરાવો તેનાથી મળી શકે.

આ ઉપરથી પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ એક દેખીતી સત્યતા છે જે સિદ્ધતાથી સ્થાપન થઈ શકતી નથી અને જેને તેમ સ્થાપવાની જરૂર પણ નથી અને જેમાંથી બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતા સ્થપાય છે.

ઉપર આપેલાં બાર પ્રત્યક્ષ પ્રમાણોના જે ભાગ એવી રીતે થઈ શકે છે કે, (૧) કેટલાંક સાધારણ એટલે જૂદી જૂદી વિધાઓમાં સામાન્ય રીતે લાગુ પડી શકે છે, અને (૨) બાકીનાં બાકી ભૂગિતિનાં પરિગિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે. પહેલાં સાત તથા નવમું સાધારણ રીતે હમેશાં ખરાંજ છે; એક આખી વસ્તુ તેના એક ભાગ કરતાં મોટી હોતીજ નોંધએ. જે વસ્તુઓ એકજ વસ્તુથી બનેલી હોય તો તેઓ બરાબર હોતી નોંધએ; ઇત્યાદિ. બાકીનાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો ભૂગિતિનાં પરિગિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે.

અષ્ટાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો તૈયારી નેત્રાથી જણાશે કે ધણાંખરાં તુરંતજ સમજી શકાય અને જેની સત્યતા નિઃસંશય છે એવાં છે; પણ મુખ્ય કરી છેલ્લું એવા પ્રકારનું છે કે તેની સમજ તુરંત પડી શકતી નથી. આ ઉપરથી એમ નહિ ધારવું કે એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; કારણ કે એમાં શું કહેવું છે તે બરાબર જાણીને જે લીટીઓ દોરશે તો સ્પષ્ટ રીતે તે જે લીટીઓ મળવીજ નોંધએ, એ હવેની ટીકાઓ વાંચવાથી જણાશે. પણ યાદ રાખવું કે ઉપર કહેલાં પહેલા વર્ગનાં સાધારણ પ્ર० પ્ર० સામાન્ય રીતે ખરાં છે, તોપણ ભૂગિતિમાં તો એ પ્રમાણ લીટી, સદાષ, અવકાશ, વગેરેનેજ લાગુ પડે છે. જે ચોખ્ખી-ઓ એકેકની બરાબર તો વજન, કિંમત, રંગ વગેરે અનેક

પ્રકારે હોય શકે, પણ જૂગિતિમાં તો એમજ સમજવું કે
“તેજો અવકાશમાં એક સરખી જગ્યા ઘેરે છે.”

ટીપ્પ:—પરેલા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપરની નીચેના ઉપસિદ્ધાંતો
નિકળે છે:—

(૧) જે અ પદાર્થ બની જરોગર હોય, અને ક, ડી અ-
રોગર હોય, અને જે અ અને ક જરોગર હોય તો વ અને ડ
જરોગર થશે.

(૨) જે કેટલાક પદાર્થો અનુક્રમે હોય તેમાં પેટ્રોલે ઝીઝ
જરોગર, ઝીઝે ત્રીઝ જરોગર, ઇસાદિ તો તેમાંના કોઈપણ
જે પદાર્થો એકેકની જરોગર થશે.

(૩) જે જે પદાર્થો જરોગર હોય, પણ તેમાંનો એક કોઈ
ત્રીઝ કરતાં મ્હોટો હોય તો તેમાંનો ઝીઝે પણ તે ત્રીઝ કરતાં
મ્હોટો થશે.

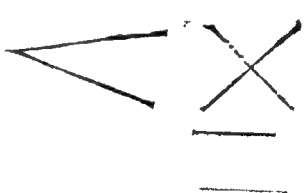
છઠ્ઠામાં જે ભાગ છે; એકજ પદાર્થનાં જમણાં સરખાં હોવાં
જોઈએ, તેમજ જે સરખા પદાર્થનાં જમણાં પણ સરખાંજ.
એ પ્રં પ્રં ઝીઝ પ્રમાણમાંથી પણ સહજ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

સાતમાને પણ છઠ્ઠાની માફકજ સમજવું.

આઠમા પ્રં પ્રં ની સમજણ જરોગર પડતી જોઈએ. (૧)
ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં આપણે કહ્યું છે તેમ જે
એક લીટી ઊંચકીને ઝીઝ લીટી ઉપર એવી રીતે મુકિયે કે
એકનો એક છેડો (ગિંદુ) ઝીઝના એક છેડા ઉપર પડે,
અને તે લીટીઓની દિશા પણ સરખીજ હોય, અને જે તેમ
કરતાં એવું જાને કે ઝીઝે છેડો પણ ઝીઝ છેડા સાથેજ
જરોગર મળી જાય તો સ્પષ્ટ છે કે તે જે લીટીઓ સરખીજ
હોતી જોઈએ; (૨) તેમજ જે એક ખૂણા ઝીઝ ખૂણા ઉપર

એવી રીતે મૂકિયે કે એકનું શિરોબિંદુ બીજાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે, અને બન્નેની અડેડી બાજુ એકેકના ઉપર એકજ દિશાએ પડે, અને જે તેમ કરતાં તે ઉપરાંત એવું બને કે બાકી રહેલી જે બાજુમાંથી પણ એક બીજાને ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે તે જે ખૂણા સરખાજ હોવા જોઈએ; (યાદ રાખવું કે દરેક બંને બાજુઓની માત્ર દિશા એકજ હોવી જોઈએ; તેમની લંબાઈ સરખી હોવી જરૂરની નથી,) (૩) તેમજ એક આકૃતિ ઉંચકીને બીજા ઉપર એવી રીતે મૂકી શકિયે કે એક આકૃતિની બધી બાજુઓ બીજાની બધી બાજુઓને બરાબર ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે બધી બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના બધા ખૂણાઓ સરખાજ હોવા જોઈએ; અને એક આકૃતિ પણ બીજાની બરાબરજ હોવી જોઈએ.

દશમા પ્ર૦ પ્ર૦ વિષે થોડો વિચાર જરૂરનો છે. આકૃતિમાંની જે લીટીઓથી અવકાશ (જગ્યા) ઘેરાય છે; પણ તે કાંઈ સીધી લીટીઓ નથી; એમાં જ લીટી વકરેલા છે; જે બન્ને લીટીઓ આ પ્રમાણે સીધીજ દોરીશું તો હકથયક્ષી આકૃતિ અથવા સદાષ્ઠ

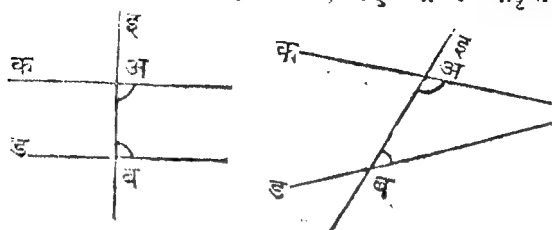


થનાર નથી.

અગીઆરમું પ્ર૦ પ્ર૦ સમજવા માટે, ગમે તે જે કાટખૂણા લઈને સ્થાનોપરી કરી જોવાથી સરખાજ છે એમ ખાતરી થશે.

બારમું પ્ર૦ પ્ર૦ બરાબર સમજવું આરંભમાં કઠિન છે; અને

પહેલા સ્કેચનો ૨૮ માં સિદ્ધાંત બતાવ્યા પહેલાં એવી બે સરળ સમજણ મળતી હોય છે; પણ આ બે આકૃતિઓ



ઉપરથી જરૂર જોઈતી સમજણ તુરત મળી શકશે. પહેલી આકૃતિમાં ક અને હ લીટીઓ ઉપર અ અને વ ખૂણા દરેક દેખાતી રીતે એક કાટ-ખૂણો છે; માટે તે બે મળીને બે કાટખૂણા થયા. એ આકૃતિમાં ક અને હ લીટી સમાન્તર હોય છે. (યાદ રાખવું કે એનો એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાનો છે; અને તે આગળ જતાં સિદ્ધ થશે; માત્ર પ્રમાણ કેવું છે તેનો વિચાર આપવાનાજ હેતુથી આ આકૃતિઓ દોરી છે.) હવે બીજી આકૃતિમાં અ અને વ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં (પહેલી આકૃતિ સાથે સરખાવતાં) એછા દેખાય છે; તે ક અને હ લીટીની સમાન્તરતા પણ નિકળી ગયતી તુરત દેખાય છે; એ બે લીટીઓ તે જોવાનૂં અ અને વ ખૂણા આવ્યા તે જાણૂં એ લગાવીશું તો મળવાનીજ.

પ્રાસ્તાવિક પ્રકરણ.

એકજ સદ્ધર્મ ઉપર જે લીટીઓ અને આકૃતિઓ દોરી શકાય તેમનાં લક્ષણોનું વર્ણન યુક્તિહીન બુદ્ધિભાગ કીધું છે. પહેલાં છ સ્કંધોમાં માત્ર સીધી લીટી, અને સીધી લીટી આકૃતિઓ, અને વર્તુલને લગતુંજ વર્ણન છે.

વ્યાખ્યા, સ્વીકૃત કૃત્યો અને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો શું તે તો આપણે જ્ઞેયું. ફરીથી યાદ લાવતાં સાફ કહેવું જોઈએ કે જે પરિમાણિક શબ્દો બુદ્ધિભાગ વાપરવામાં આવ્યા હોય તે શબ્દોનો ખરો અર્થ બતાવે તો તે શબ્દની વ્યાખ્યા. સિદ્ધાંતો સાબિત કરવા માટે ત્રણ સહેલાં કૃત્યો કરવાની જરૂર છે. જે નિતા તેની સાબિતી થઈ શકે નહીં, અને જે પહેલાંની માગી લીધેલાં છે તે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકૃત કહેવાય છે. કેટલાંક પ્રમાણો એટલાં દેખીતાં છે કે તેમને વધારે સહેલાં પ્રમાણોથી સાબિત કરવાં અશક્ય છે; તેવાં પ્રમાણોને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો કહેવાં. આ પ્રમાણે બુદ્ધિભાગના ખાસ શબ્દોનો અર્થ સમજવા પછી, અને ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો અને ચાર પ્રત્યક્ષ પ્રમાણોનો આધાર લઈને, સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવાને આપણે તૈયાર છીએ.

ઉપર કહેલા, લીટી, આકૃતિ વગેરેના ગુણો યુક્તિહીન કેટલાક સિદ્ધાંતોથી સાબિત કરી આપે છે; તે એવી રીતે કે એક સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીથી સાબિત કરી ગયા તેને ત્યાર પછીના હરકોઈ સિદ્ધાંતમાં ખરું છે એમ માનવું; ને આગળ વધવું અને નવા નવા સિદ્ધાંતો શોધતા અને સાબિત કરતા જવું. આવી રીતે તર્ક કીધાથી જે પરિણામો નિકળે તેને સિદ્ધાંત કહેએ. દરેક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા પહેલાં તેમાં શું સિદ્ધ કરવું છે અથવા શું કાર્ય કરવું છે તે આપણી સામે પહેલાં નિશ્ચિત અને સાફ

શબ્દોમાં મૂકવું જોઈએ; એ પ્રમાણે સિદ્ધાંતને મનાએ પડેલે તેની પ્રતિષ્ઠા આને છે. ભૂમિતિની પ્રતિષ્ઠાઓ એ પ્રકારની છે; (૧) કૃત્યો અને (૨) પ્રમેયો. કોઈ વેળાએ પ્રતિષ્ઠામાં કાંઈ કરવાનું કહેલું છે; જેમકે, એક આપેલી લીટી ઉપર એક સમયામ્નુ ત્રિકોણ દોરવાનો; અથવા એક ત્રિકોણ એવો ગનાવવો કે તેની ત્રણ બાજુઓ ત્રણ આપેલી રીટી લીટીઓની બરાબર હોય; છતાંકિ. આવા સિદ્ધાંતને કૃત્ય કહે છે. એથી ઉલટું કોઈ વેળાએ કાંઈ તત્ત્વની સત્યતા બતાવવાની હોય છે; જેમકે, એવું સાબિત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા મળીને એ કાટખૂણા જેટલાજ થશે; અથવા એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સરખી હોય તો તેના ત્રણે ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઈએ; છતાંકિ. આવા પ્રકારના સિદ્ધાંતને પ્રમેય કહે છે. હવે એ બન્ને પ્રકારના સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા માટે પડેલાં તો પ્રતિષ્ઠા લખીને તે પ્રમાણે એક આકૃતિ દોરીને થું આપેલું છે અને થું મારેલું અથવા કરવાનું છે તે કહેવું જોઈએ. ત્યાર પછી મારેલું પરિણામ બરેબર મળે છે કે નહિ તે તપાસવાને આકૃતિ સંપૂર્ણ કરી, એટલે જરૂર પ્રમાણે લીટીઓ લગાવવી, અથવા પિંટુઓ સાંધવાં; અથવા વર્તુલો દોરવા, વગેરે કૃત્યો કરવાં તેનું નામ રચના; ત્યાર પછી જે માગ્યું હોય તે બતાવવાનું અથવા તેની સત્યતા આગલા સિદ્ધાંતોની મદદ વગેરેથી બતાવી આપવાનું કામ રહ્યું, તેને સિદ્ધતા કહે છે. સિદ્ધાંતોને અનુક્રમે નંબરો હોય છે. માટે હવે સિદ્ધાંતની ગોઠવણ કેવી હોય છે તેનો નિયાર આની શકશે.

(૧) સિદ્ધાંત (નમ્બર). (૨) કૃત્ય કે પ્રમેય.

(૩) પ્રતિષ્ઠા.

(૪) પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે આકૃતિ.

(૫) રચના.

(૬) શું સિદ્ધ કરવું છે તે પ્રસિદ્ધ કરવું.

(૭) સિદ્ધતા અથવા પુરાવો.

(૮) સિદ્ધતા લેપરથી શું સાબિત થયું તે.

એ પ્રમાણે ૮ ભાગ થયા. દરેક સિદ્ધાંતમાં એ આઠ ભાગ જૂદા લખવા જોઈએ; પણ તેમ કરતાં લંબાણુ થઈ જવાને લીધે (૪), (૬) અને (૮) અવશ્ય પુરાવામાં તો આવેછેજ, પણ તેમનાં જૂદાં મથાળાં લખાતાં નથી. તે શિવાયનાં મથાળાં બધી સિદ્ધતાઓમાં લખવાં જરૂરનાં છે. એક કૃત્ય અથવા પ્રમેય પૂરું થયું કે તેની નીચે “આજ કૃત્ય કરવાનું હતું” અથવા “આજ પ્રમેય સિદ્ધ કરવાનું હતું” એવા શબ્દો લખવાનો ધારો છે. માટે આ વાક્યોનાં સંસ્કૃત વાપાંતરો સંક્ષેપમાં લખવાં. પહેલાને માટેકૃત્યં કૃતં સંક્ષેપમાં (કૃ. કૃ.) અને બીજાને માટે પ્રમેયં સિદ્ધં (સંક્ષેપમાં પ્ર. સિ.)

ધણી વેળાએ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં જે જાગત આપેલી અથવા સીકારેલીજ હોય તે પુરાવા માટે વાપરવી પડે છે; ત્યારે તે જાગત લખીને તેની પાસે કૌંસમાં (પ્રતિબં) લખવામાં આવે છે; તેનો અર્થ એમ કે એ વાત તો પ્રતિજ્ઞામાં કમુલ કીધેલી છેજ.

તેજ પ્રમાણે કેઈ પણ સિદ્ધાંતની સાબિતીમાં જે જે આપણે આગળ શીખી ગયા તેનો આધાર લેવાની હરકત નથી. પણ તે આધાર શાથી ગળ્યો તે ટુંકામાં ખાતરીને માટે પાસે લખવો જરૂરનો છે. જેમકે રચના કરતાં જે ગિંદુઓ સાંધ્યાં

તો તુરત તેની પાસે (સી. ૧) લખવું; એટલે તેથી સમજાવું કે આ કૃત્ય આપણે પહેલા નમ્યારના સ્વીકૃત કૃત્યને આધારે કીધું. એજ પ્રમાણે વળી એક સિદ્ધાંતમાં તેની આગળના સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો હોય તો તે પણ એમજ લખાય છે. ધારો કે ત્રીજા સંકંધના ૩૨ માં સિદ્ધાંતમાં પહેલા સંકંધની ૧૫ મી વ્યાખ્યાની જરૂર પડી; તો તે (૧. વ્યા. ૧૫) કરી લખવું; અને ત્રીજા સંકંધના ૨૨ માં સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો તો (૩. ૨૨) કરી લખવું. એ વગેરે માટે નીચે આપેલા સંક્ષેપ ધ્યાનમાં રાખવા:—

(૧. વ્યા. ૫) એટલે પહેલા સંકંધની પાંચમી વ્યાખ્યા.

(સી. ૩) એટલે ત્રીજું સ્વીકૃત કૃત્ય (એ કૃત્યો માત્ર પહેલાજ સંકંધમાં છે.)

(પ્ર. પ્ર. ૭) એટલે સાતમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી; (એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો માત્ર પહેલાજ સંકંધમાં છે.)

(૧. ૫) એટલે પહેલા સંકંધના પાંચમા સિદ્ધાંત પ્રમાણે.

(૨. ૭) „ „ „ સાતમા „ „

(પ્રતિ,) „ જે સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવો છે તેજ સિદ્ધાંતની પ્રતિમાને આધારે.

(રચ.) એટલે તેજ સિદ્ધાંતની રચના કીધી છે તેને આધારે.

ઉપલા સંક્ષેપો દરેક સિદ્ધાંતમાં વપરાય છે; તે ઉપરાંત નીચેના સંક્ષેપો પણ કોઈ વેળા વપરાય છે.

∴ કારણ કે, ∴ માટે.

= યરોગર, < ખણો, | — કાટખૂણો,

Δ ત્રિકોણ. ॥ અથવા, = સમાન્તર સીધી લીટીઓ.

૧ લંગ, ૦ વર્તુલ, સીં ૦ લીં ૦ સીંધી લીંટી, ચોં ચોરસ.

એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ થવાથી બીજી કોઈ સત્યતા તુરંતજ તે ઉપરથી કલ્પન થતી હોય, તો તેની આધાર રાખતી સત્યતાને ઉપસિદ્ધાંત કહે છે. એવા ઉપસિદ્ધાંતો કોઈ વખતે તેમની પછીના સિદ્ધાંતોમાં પુરાવા એટલે આધાર માટે કામ પહોંચી આવે છે; એવા ઉપસિદ્ધાંતો તેઓના સિદ્ધાંતને છેડે લખવામાં આવે છે અને તેમ લખ્યા હોય તોજ આધાર માટે લેવાય છે; જેમકે (૨. ૪, ઉપ) એટલે “બીજા રકુંધના ૪ થા સિદ્ધાંતને છેડે આપેલા ઉપસિદ્ધાંતને આધારે” એમ સમજવું.

કોઈ કોઈ સિદ્ધાંતની નીચે સગજજી સહેલ કરવા માટે અથવા અગત્યની સૂચના માટે ટીપ આપી છે, તે છોડી ન દેતાં સરખાજ ધ્યાનથી ગ્રહણ કરવી.

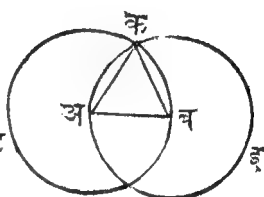
દરેક સિદ્ધાંત નીચે પ્રશ્નો આપ્યા છે, તે જનતાં સુધી સહેલા અને તુરંત થાય એવાં એવાં નવાં સિદ્ધાંતો છે; તે તક મળે કરવાથી આ વિદ્યાનું વધારે મજબુત જ્ઞાન સમ્પાદન થશે; અને વિદ્યાર્થીની બુદ્ધિની કસોટી થઈ પડશે એટલુંજ નહિ, પણ જે એપડીમાંના સિદ્ધાંતો છે તે વધારે મજબુતીથી મન ઉપર ઠસશે. જનતા સુધી શિક્ષકે એ પ્રશ્નો ધેરથી ઢુંકી રીતે લખી મંગાવવા.

સિદ્ધાંત ૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટી ઉપર એક સમખાળૂ ત્રિકોણ કહાડવો.

સાધન.

ધારો કે અવ આપેલી સીધી લીટી છે; તે અ અને વ બંને તરફથી હક થયેલી છે, તેના ઉપર એક સમખાળૂ ત્રિકોણ કહાડવાનો છે.



રચના.

અ મધ્યખિંદુ લઇને અને અવ જોડેલો અન્તર જોડેલો ત્રિજ્યા, લઇને એક વક્રવર્તુલ દોરો (સ્વી ૩.).

વ મધ્યખિંદુ લઇને અને વઅ ત્રિજ્યા લઇને અક્રવર્તુલ દોરો. (સ્વી. ૩).

આ બે વર્તુલો એકેકને બે ખિંદુમાં છેદે છે, તેમાંના એક ક ખિંદુમાંથી, અ અને વ ખિંદુઓ સુધી બે સીધી લીટીઓ કઅ અને કવ દોરો. (સ્વી. ૧)

ત્યારે અવક માગેલો સમખાળૂ ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

અ ખિંદુ વક્રવર્તુલનું મધ્યખિંદુ છે; માટે અકસીધી લીટી અવ સીધી લીટીની બરાબર છે. (વ્યા. ૧૫.)

અને વળી અકદ વર્તુલનું મધ્યબિંદુ બ છે,

માટે વક લીટી વજ ની બરોબર છે. (બા. ૧૫).

પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે અવ તો અકની બરોબર છે;

માટે અક અને વક દરેક અવ ની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તેઓ અસ્પર્શ બરોબર હોવાં જોઈએ. (પ. પ્ર. ૧).

માટે અક લીટી વક ની બરોબર છે;

માટે કજ, અવ અને વક ત્રણે અસ્પર્શ સરખી છે;

એટલે અવક ત્રિકોણ સમબાજુ છે; અને તે વળી

આપેલી લીટી અવ ના ઉપર કહાડ્યો છે. ક. ક.

પ્રશ્નો.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં જે બીજા બિંદુમાં બંને વર્તુલો અકેકને છેદે છે તે બિંદુ આપેલી લીટીના છેડા સાથે જોડતાં માળ્યા પ્રમાણેનો એક બીજો ત્રિકોણ થશે.

(૨) ઉપલી સિદ્ધતા સંલેખમાં લખો.

અવક = તું મધ્યબિંદુ અ છે.

∴ અવ = અક (બા. ૧૫).

તેમજ વજ = વક

∴ અવ = અક = વક (પ. પ્ર. ૧).

∴ અવક સમબાજુ Δ અવ લીટી ઉપર થયો.

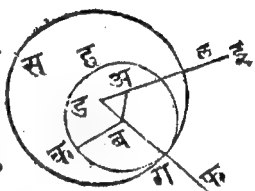
(૩) એક સમર્યાદ સીધી લીટી ઉપર ફક્ત કેટલા સમ-બાજુ ત્રિકોણો દોરી શકાય તે આકૃતિ રચના ઉપરથી કહો.

સિદ્ધાંત ૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી સીધી લીટી દારવી કે તે એક આપેલી સીધી લીટીની બેરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે અ આપેલું બિંદુ છે; અને વક આપેલી લીટી છે; તો અ બિંદુમાંથી એક લીટી વક ની બેરોબર દારવી છે.



રચના.

અ થી વ સુધી અવ લીટી દારો.

(સી. ૧.)

અને અ ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણુ અવડ કહાડો. (૧. ૧.)

હા અને હા સીધી લીટીઓને જ અને ક સુધી લંબાવો (સી. ૨).

વ મધ્યબિંદુ લઈને, અને વક ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ કાઢ દારો; (સી. ૩).

ધારો કે તે જગતે ગ બિંદુમાં છેડે છે. અને હ મધ્યબિંદુ લઈને, હા ત્રિજ્યાએ ગસલ વર્તુલ દારો (સી. ૪).

જે અહ ને લ બિંદુમાં છેડે છે.

ત્યારે અલલીટી માગ્યા પ્રમાણે વકની બેરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

વ બિંદુ કાઢ વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે.

માટે વક લીટી વગ ની બરોબર છે. (બા ૧૫).

અને હ બિંદુ ગસલ વર્તુલનું મધ્યાબંદુ છે,

માટે હલ લીટી હગ ની બરોબર છે. (બા ૧૫).

પણ હલનો એક ભાગ હમ તે હગના એક ભાગ હવની બરોબર છે. (૧. ૧).

માટે સરખા ભાગે બાદ કરતાં, બાકીનો ભાગ મલ તે બાકીનો ભાગ વગ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩).

પણ ઉપર બતાવ્યું કે વક પણ વગની બરોબર છે; માટે મલ અને વક દરેક વગ ની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તે અરસ્પરસ બરોબરજ હોવાં જોઈએ,

માટે મલ સીધી લીટી વકની બરોબર છે (પ્ર. પ્ર. ૧). એટલે આપેલા મબિંદુમાંથી મલ લીટી આપેલી સીધી લીટી વકની બરોબર માગ્યા પ્રમાણે દોરાર્ધ. ક. ક.

સૂચના:—આકૃતિ બરોબર દોરવા માટે વિવાર્ધાંએ પહેલાં મહોટો વર્તુલ દોરવો; પછી તેમાં નાનો વર્તુલ એવી રીતે દોરવો કે મન્નેનાં નીચેનાં બિંદુઓ અરસ્પરસ આડકી રહે; ને પછી પછવાડેથી માંહેની લીટીઓ દોરવી; ફક્ત સારી આકૃતિ દોરવા માટે આ સૂચના કીધી છે. રચના લખવી તે તો સિદ્ધાંતમાં કલા પ્રમાણેજ.

ટીપ-(૧) આ સિદ્ધાંતની રચના કઠિન છે; અને એટલી બારી રચનાવાળા સિદ્ધાંતો પહેલા રક્ષમાં થોડાજ છે; માટે આકૃતિ બરોબર રચવી જરૂરી છે; તે માટે નીચે લખેલી બાબતો ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આપેલા ગિંદુને આપેલી લીટીના નજદીકના છેડા સાથે સાંધવું.

(૨) પછી એ સાંધનારી લીટી ઉપર એક સમજાજૂ ત્રિકોણ દોરવો.

(૩) પછી તે ત્રિકોણની ઉપલી બે બાજુઓ દૂર સુધી લંબાવવી.

(૪) પછી આપેલી લીટીના સાંધના છેડાને મધ્યગિંદુ લખને, અને આપેલી લીટીનેજ અન્તર એટલે ત્રિજ્યા ગણીને પહેલો (ન્હાનો) વર્તુલ દોરવો.

(૫) આ વર્તુલ લંબાવેલી બન્ને બાજુઓને છેદશેજ.

(૬) ત્રિકોણના છેક ઊંચા શિરોગિંદુને મધ્યગિંદુ લખને ત્યાંથી તે છેક આપેલી લીટીના છેડાની પાર જઈને જે ગિંદુમાં પહેલો વર્તુલ લીટીને છેદે છે ત્યાં સુધીની ત્રિજ્યા લખને મ્હોટો વર્તુલ દોરવો.

(૭) આપેલું ગિંદુ આપેલી લીટીના બેમાંથી ગમે તે છેડા સાથે સાંધવું, અને સાંધનારી લીટી ઉપરનો ત્રિકોણ લીટીની ઉપર અથવા હેઠળ ગમે તેમ દોરવો. બધી એટલે ચારે રીતે ગાગેલી લીટી મળી આવશે. ત્રિધારીએ એ ચારે આકૃતિઓ દોરીને તપાસવી.

(૮) યાદ રાખવું કે જે કમ્પાસવતી લીટીની લંબાઈ બરવાની છુટ હત તો આ સિદ્ધાંત કરવાની જરૂર નહતી પણ ચુકિત કે તે વાત સ્વીકારી નથી.

પ્રશ્ન.

(૧) એક આપેલા ગિંદુમાંથી એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીને મળે એવી એક આપેલી લંબાઈની લીટી દોરો.

(૨) આપેલું ગિંદુ આપેલી લીટીમાંજ હોય તો ઉપલે સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) તેમજ આપેલું ગિંદુ આપેલી લીટીનો એક છેડો હોય તો.

(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમઘ્નિયામૂ ત્રિકોણ કઢાડો કે જેની સરખી યામૂઓ એક આપેલી સીધી લીટીની યરોખર હોય.

(૫) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમઘ્નિયામૂ ત્રિકોણ કઢાડો કે તેની બે સરખી યામૂઓ તેના યયા કરતાં જેવડી હોય.

(૬) બે અવ-ચક્ર તો હ ગિંદુ ન્હાના વર્તુલના પરિધ ઉપર પડશે.

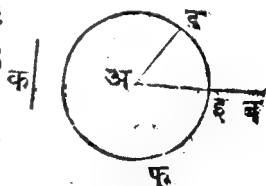
સિદ્ધાંત ૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—બે આપેલી સીધી લીટીઓમાંનો મોટા-ટીમાંથી ન્હાની લીટી યરોખર એક ભાગ કાપવો.

સાધન.

ધારો કે અવ અને ક બે આપેલી સીધી લીટીઓ છે; જેમાં અવ મોટાટી છે.

અવ લીટીમાંથી એક ભાગ ક લીટી જેટલો કાપવો છે.



રચના.

અ ગિંદુમાંથી એક મહ લીટી ક લીટીની યરોખર દારો. (૧. ૨.)

પછી અમધ્યખિંદુ લઇને, અને અહ ત્રિજ્યા લઇને
એક વર્તુલ હરફ દોરો; ધારે કે તે વર્તુલ અવ લીટીને
૩ ખિંદુમાં છેદે છે.

તો અહ ભાગ માનવા પ્રમાણુનો થશે.

સિદ્ધતા.

હરફ વર્તુલનું અમધ્યખિંદુ છે;
માટે અહ લીટી અહ ની ધરોળર છે. (ખા. ૧૫.)
પણ અહ તો ક લીટીની ધરોળર છે. (૨૪ના).
માટે અહ અને ક દરેક અહ ની ધરોળર છે.
માટે અહ લીટી ક ની ધરોળર છે (પ્ર. પ્ર. ૧.)
અને તે આપેલી મ્હોટી લીટીમાંથી આપેલી ન્હાની
લીટી ધરોળર કાપી. ક. ક.

પ્રશ્ન,

- (૧) જે આપેલી લીટીના સર્વાંગા ધરોળર એક લીટી દોરો.
- (૨) જે આપેલી લીટીની ગાદગાડી ધરોળર એક લીટી
દોરો.
- (૩) એક ન્હાની આપેલી લીટીને લંગાતીને મ્હોટી આ-
પેલી લીટી ધરોળર દોરો.

સિદ્ધાંત ૪ ની સમજણ.

એથો સિદ્ધાંત ધણો અગત્યનો છે; અને એમાં જે પુરાવો
વાપરવામાં આવ્યો છે તે નવીન તરેહનો છે; માટે તે વિશે આ
ટીપ પહેલાંથી વાંચવાથી ફાયદો થશે.

દોષ પણ એક ત્રિકોણમાં છે પરિગિતો હોય છે; તથા બાજુ
અને ત્રણ ખૂણા; હવે જે જે આપેલા ત્રિકોણોમાં ધણું કરીને

ઉપલાં છમાંનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આખ્યાં હોય તો બાકીનાં ત્રણ સરખાં થશે; અને ત્રિકોણ આખા પણ એકેકને સરખા થશે. એવી રીતે જે ત્રિકોણોની સરખાઈ સ્થાપવાને પહેલા રકંધનાં ત્રણ સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કીધા છે. તેમાંનો પહેલો આ છે, બીજા નમ્બર ૮ અને ૨૬ છે. આ સિદ્ધાંતમાં એમ આપેલું છે કે એક ત્રિકોણની જે બાજુઓ જુદી જુદી બીજા ત્રિકોણની જે બાજુઓની બરાબર છે; અને ત્રીજું એ કે તે બંને બાજુઓની વચ્ચે આવેલા ખૂણા પણ બંને ત્રિકોણોમાં સરખા છે; તો સિદ્ધ કરવું કે તે ત્રિકોણોનાં બાકીનાં પરિમિતો પણ સરખાંજ થશે; અને બંને ત્રિકોણો પણ સરખાંજ થશે.

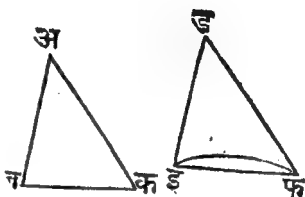
સિદ્ધતા સ્થાનોપરિ કરવાથી થશે. એ વિશે બ્યાખ્યા ૧૦-૧૨ ની સમજણમાં લખ્યું છે તે તથા સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં જે છેલ્લે કહ્યું છે તે બરાબર ધ્યાનમાં લેવું. પુરાવામાં એક ત્રિકોણ ઊંચકીને બીજા ઉપર મૂકીને પછી સિદ્ધ કરે છે કે તે બંને એકેક ઉપર બરાબર પડી જાય છે, માટે તેઓ સરખા હોવા જોઈએ.

સિદ્ધાંત ૪. પ્રમેય.

બ્યાખ્યા:-જો એક ત્રિકોણની જે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની જે બાજુઓની બરાબર હોય, અને વળી તે સરખી બાજુઓની વચ્ચે આવેલા અંતર્ખૂણાઓ પણ બરાબર હોય તો (૧) તે ત્રિકોણોના પાયા એટલે બાકીની બાજુઓ બરાબર થશે. (૨) બાકી રહેલા ખૂણાઓમાંથી જે ખૂણાઓ સરખી બાજુઓની સામેના છે તેઓ અરસપરસ બરાબર થશે અને (૩) તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરાબર થશે.

સાધન.

ધારો કે અવક અને હફ બે આપેલા ત્રિકોણ છે; જેમાં અવ બાજુ હફની બરાબર છે, અવ બાજુ હફની બરાબર છે અને અનંતબૂણા વચ્ચે તે હફ અનંતબૂણાની બરાબર છે તો સિદ્ધ કરવાનું કે (૧) અવ બાજુ હફની બરાબર થશે; અને (૨) અવ બાજુની સામેના ખૂણા અવક તે હફ બાજુની સામેના ખૂણા હફની બરાબર થશે, અને અવની સામેના ખૂણા અવક તે હફની સામેના ખૂણા હફની બરાબર થશે, અને (૩) અવક ત્રિકોણ હફ ત્રિકોણની બરાબર થશે.



સિદ્ધતા.

કારણ કે જો અવક ત્રિકોણ ઊંચકીને હફ ત્રિકોણ ઉપર મૂકાયે એવી રીતે કે અ બિંદુ હ બિંદુ ઉપર પડે અને અવ લીટી હફ લીટીની ઉપર હોય, તો અ બિંદુ હ બિંદુ ઉપરજ પડવું જોઈએ.

કારણ કે અવ લીટી હફની બરાબર છે. (પ્રતિજ્ઞા.)

હવે અવ લીટી હફ ઉપર બરાબર પડી રહે છે તો અવ લીટી હફના ઉપર તેજ દિશાએ પડવી જોઈએ;

કારણ કે અવક ખૂણા હફ ખૂણાની બરાબર છે. (પ.)

જો એમ ન પડે તો તો અ અને હ ખૂણા નહાના મહોરા થાય,

વળી જ બિંદુ હ ઉપર પડે છે અને જક તથા હક લીટીઓની દિશા એકજ છે, તો ક બિંદુ ઉપર પડ-
વુંજ જોઈએ.

કારણ કે જક લીટી હક ની બરોબર છે. (પતિ.)

આપણે જોયું કે વ બિંદુ હ ઉપર પડે છે.

અને ક બિંદુ ફ ઉપર પડે છે.

તો તેમની વચ્ચે આવેલી વક લાટી ઉપર હક ઉપર પડવીજ જોઈએ; કેમકે જો તેમ ન પડે અને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એ ચારમાંના બધે બિંદુઓ મળવા છતાં એકેક ઉપર ન પડે તો તો બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરે; પણ એ તો અશક્ય છે. (પ. પ્ર. ૧૦.)

માટે વક લાટી હક ના ઉપરજ પડવી જોઈએ અને તેઓના છડા તો એકજ બિંદુમાં આવી રહેલા છે.

માટે (૧) વક લીટી હક ની બરોબર છે (પ. પ્ર. ૮)

વળી અવક ત્રિકોણના, વ અને ક ખૂણા પણ હક ત્રિકોણના હ અને ફ ખૂણા ઉપરજ પડે છે.

માટે (૨) અવક ખૂણા હક ખૂણાની બરોબર છે. (પ. પ્ર. ૮.)

અને અવક ખૂણા હક ખૂણાની બરોબર છે.

(૩) વળી આખો અવક ત્રિકોણ હક ત્રિકોણ ઉપર બરોબર પડી રહે છે;

માટે, અવક ત્રિકોણ પણ હક ત્રિકોણની બરોબર છે. (પ. પ્ર. ૮.)

માટે જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ ઈ

પ્ર. સિં.

ટીપ:—(૧) આ સિદ્ધાંત પ્રમેય છે; પહેલા ત્રણ કૃત્ય હતા. એમાં કાંઈ જનાવવાનું નથી; પણ જે એક ત્રિકોણનાં ત્રણ આપેલાં પરિમિતો ગીઝનાં ત્રણની જરોગર હોય તો તે ત્રિકોણો બધી રીતે સરખા થશે એવું સિદ્ધ કરવાનું છે.

(૨) યુક્તિડે સ્વીકૃત કૃત્યોમાં સ્થાનોપરિ કરવાનું સ્વીકાર્યું તો નથી માટે ત્રિકોણો એકેક ઉપર મૂકી શકાય એવું કલ્પનાથીજ વિચારવાનું છે, તો પણ શિક્ષક જે ત્રિકોણો કાગળ છં ના લખે એકેક ઉપર શિરોબિંદુ વગેરે મૂકીને જનાવશે તો આ સિદ્ધાંત સહેલથી સમજશે.

પ્રશ્નો.

(૧) જે અક=ડફ હોય અને વક=ડફ હોય, તો કયા ખૂણા સરખા આપેલા હોવા જોઈએ; અને કયા ખૂણા સરખા થશે, તે સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ચોરસની કઈ ખૂણાઓને તથા ચોરસને દ્વિભાજે છે.

(૩) એક સમદ્વિગાજી ત્રિકોણના શિરોબિંદુને દ્વિભાગનાર લીટી પાયાને ગળે તો તે પાયાને દ્વિભાગશે; અને પાયા ઉપર લાગે થશે.

(૪) જો અવક ત્રિકોણ સમદ્વિગાજી હોય તો ઉપર પ્રમાણેની સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો કે વ અને ક ખૂણા સરખા થશે.

સિદ્ધાંત ૫ માની સમજણ.

પાંચમો સિદ્ધાંત ઘણું કરીને આરંભ કરનારાઓને કઠિન લાગે છે, માટે આ નિચે આપેલા સિદ્ધાંત જે ચેત્થાનોજ એક જૂદો આકાર છે તે પહેલે જોવાથી પાંચમો કદાચ વધારે સહેલથી સમજાશે.

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અથવા બે અથવા અને એક સમબાજુઓમાં ડ અને હ એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે મડ=મહ છે; અને વહ તથા હક બિંદુઓ બેઝમાં, તે વહ લીટી હક ની યરોગર થશે.



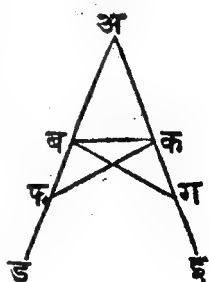
કારણ મડક અને અવહ ત્રિકોણમાં મડ=મહ છે; અને અવ=અક છે. (પ્રતિ.) એકની બે બાજુઓ મડ અને મક બીજાની બે બાજુઓ મહ અને અવની યરોગર છે; અને તેમના અન્તર્બૂજો તે એકને એક જ છે એટલે સરખોજ છે. ∴ એ બે ત્રિકોણો સરખા થયા; અને હક લીટી વહ ની યરોગર થઈ.

સિદ્ધાંત ૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો યરોગર બાજુની સામેના (એટલે પાયા ઉપરના) ખૂણાઓ યરોગર છે; અને તે સમબાજુઓને ક્ષંબાવિધે તે પાયાની બીજી બાજુએ ખૂણા થશે તે પણ (એકેકની) યરોગરજ થશે.

સાધન.

ધારો કે અથવા એક સમદ્વિ-બાજુ ત્રિકોણ છે; જેની અથ બાજુ એક બાજુની યરોગર છે; ધારો કે તે સરખી બાજુઓ ડ અને હ બિંદુઓ સુધી વધારીતો અથવા ખૂણા એકબે ખૂણાની યરોગર થશે; અને કવહ ખૂણા એકબે ખૂણાની યરોગર થશે.



રચના.

ઘટ લીટીમાં એક ક બિંદુ લેા;
 અને આખી ઘટ લીટીમાંથી એક અગ ભાગ, અક
 લીટીની બરોબર કાપે. (૧. ૩)
 ક, ક અને ઘ, ગ બિંદુઓ સાંધે. (૨૧ી ૧.)

સિદ્ધતા.

કઅક અને ગઅઘ ત્રિકોણોમાં,
 કઅ લીટી ગઅ ની બરોબર છે, (રચના.)
 અને અક લીટી અઘ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
 માટે એક ત્રિકોણની કઅ, અક લીટીઓ બીજા ત્રિ-
 કોણની ગઅ, અઘ લીટીઓની બરોબર છે,
 અને અનતર્બૂણા બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.
 માટે કઅક ત્રિકોણ ગઅઘ ત્રિકોણની બરોબર છે.
 (૧. ૪)

એટલે કક લીટી ગઘ ની બરોબર છે.
 અને અકફ ખૂણા અઘગ ખૂણાની બરોબર છે.
 અને અકક ખૂણા અઘઘ ખૂણાની બરોબર છે.
 વળી, આખી અક લીટી અગની બરોબર છે. (રચ.)
 તેમાં અઘ અને અક બરોબર આપેલી છે, (પ્રતિ.)
 માટે બાકીનો ભાગ વક તે બાકીના ભાગ કગની
 બરોબર થવો જોઈએ. (૫. ૫. ૩).

ત્યારે, વકક, કઅઘ ત્રિકોણોમાં, વક લીટી કઅ ની
 બરોબર છે. (સિદ્ધતા.)

અને ફક્ લીટી ગવની ખરોખર છે, (સિદ્ધતા).

અને અન્તર્બૂણા વફક અને કમવ ખરોખર છે,
(સિદ્ધતા).

માટે વફક અને કમવ ત્રિકોણા સર્વ પ્રકારે સર-
ખા છે.

અને ફવક ખૂણા ગકવ ખૂણા ખરોખર છે.

અને વફક ખૂણા કવગ ખૂણા ખરોખર છે. (૧૪.)

પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે આખો અવગ

આખા ખૂણા અકફની ખરોખર છે.

અને હમણાં સિદ્ધ કીધું કે તેમના ભાગે કવગ

અને વફક સરખા છે.

માટે બાકીના ખૂણા અવક બાકીના ખૂણા અકવ
ની ખરોખર થયો. (પ. પ્ર. ૩).

અને એ અવક ત્રિકોણના પાયા ઉપરનાજ ખૂણા છે.

વળી, ઉપર બતાવી ગયાકેફવક અને ગકવ ખૂણા

પણ ખરોખર છે.

અને તે પાયાની બીજી બાજુના ખૂણા છે.

માટે આપણે સિદ્ધ કીધું કે એક સમદ્વિબાજુ
ત્રિકોણમાં ૪૦ પ્ર સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:—જે એક ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો તેના
ખૂણા પણ સમ હોય જોઈએ.

પ્રશ્નો.

(૧) સમબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા ખરોખર છે.

(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ જે
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અવક અને હવક છે; તેમાંની બીજી

(૫) જો સમઘાળુ ત્રિકોણ આકૃતિમાં ન કઢાડતાં ફક્ત સમઘાળુ ત્રિકોણ પાયા ઉપર કઢાડ્યો હોય તો આ કૃત્ય સિદ્ધ થાય કે નહિ ?

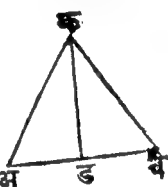
સિદ્ધાંત. ૧૦ કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીને દુભાગવી એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે અવ આપેલી સીધી લીટી છે;

તેના બે સરખા ભાગ કરવાના છે. અ ડ વ



રચના

અવ લીટી ઉપર એક સમઘાળુ ત્રિકોણ અવક ધારો. (૧. ૧)

અને અવક ખૂણાને કડ લીટીએ દુભાગો. (૧. ૫)

એ લીટી અવ ને ડ બિંદુમાં મળે છે.

તો અવ લીટીને ડ બિંદુ દુભાગશે.

સિદ્ધતા.

અવક અને વકડ ત્રિકોણોમાં

અવ લીટી વક ની બરોબર છે, (રચના)

અને કડ લીટી બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને અવક અન્તર્ખૂણા વકડ અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે. (રચના)

માટે એ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.

માટે અડ પાયો વડ ની યરોળર છે.

માટે હ બિંદુમાં આપેલી લાટીના બે સરખા ભાગ થયા. ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુના ખૂણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને પણ દુભાગશે.

(૨) એક આપેલા પાયા ઉપર એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની સમઢિયાળૂઓનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીની યરોળર થાય.

(૩) એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીના આઠ સરખા ભાગ કરો.

(૪) આપેલી લીટીના પ્રત્યેક છેડાને મધ્યબિંદુ અને આપેલી લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને બે વર્તુલો દોરો; તે બે બિંદુઓમાં એ વર્તુલો એકેકને છેદે છે તે બે બિંદુઓ સાંધવાથી આપેલી લીટી દુભાગશે.

(૫) ઉપલા પ્રશ્નમાં દુભાગનારી લીટી આપેલી લીટીને લંબ છે.

(૬) જે ચતુષ્કોણાકૃતિના કોણો એકેકને દુભાગે અને એકેક ઉપર લંબ હોય તે આકૃતિ સમઢિયાળૂ હોવી જોઈએ.

(૭) એક અન્તવાન સીધી લીટીને એવી લંબાવો કે લંબાવેલો ભાગ તે આખી લંબાયલી લીટીનો ત્રિજો ભાગ થાય.

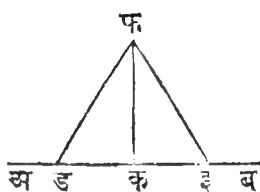
સિદ્ધાંત ૧૧ કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તે લીટીમાં એક આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દારવી.

સાધન.

ધારે કે અવ આપેલી
લીટી છે, અને તેમાં ક
આપેલું બિંદુ છે.

ક બિંદુમાંથી એક લીટી
અવ ઉપર લંબ દોરવાની છે.



રચના.

અક માં એક હ બિંદુ લો; અને કવ માંથી કદલીટી
કહ બરોબર કાપો. (૧. ૩)

હદ લીટી ઉપર એકસમબાજી ત્રિકોણ હકદ દોરો.
(૧. ૧)

કક સાધો;

ત્યારે કક લીટી અવ ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધતા.

{ હકક અને હકક ત્રિકોણોમાં, હક લીટી હક ની
બરોબર છે. (રચના.)

અને કક બન્નેમાં સાધારણ છે,

{ અને ત્રિજી બાજુ હક ત્રિજી બાજુ હક ની
બરોબર છે. (રચના.)

માટે હકક ખૂણા હકક ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૮)

{ અને વળી તેઓ પાસપાસેના ખૂણા છે,

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને
પાસપાસેના ખૂણા સરખા કરે ત્યારે તે દરેક ખૂણાને
કાટખૂણા કહે છે. (બ્યા. ૧૦.)

માટે હકક અને હકક દરેક કાટખૂણા છે.

માટે કફ લીટી અથ ઉપર લંબ છે, અને તે ક જિંદુ-
માંથી દારી છે. ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં જતાવો કે કફ માં અથવા તેને લંબાવીને તેમાં કોષ પશુ જિંદુ લખએ તો તે ડ અને ક જિંદુ-ઓથી સરખે અન્તરે છે.

(૨) જે આપેલું જિંદુ લીટીને છેડે હોય તો સિદ્ધાંતમાં કીધેલી રચના ઉપરાંત શી રચના કરવી જોઈએ ?

(૩) એકજ જિંદુમાંથી આવી લંબ કેટલી દારી શકાય ?

(૪) એક સમયાન્ન ત્રિકોણની જે બાજુઓ દુભાગીને તે જિંદુઓમાંથી તે બાજુઓને જે લંબ દારો; જે જિંદુમાં તે લંબો મળે છે તેને ત્રિકોણના ત્રણે શિરોજિંદુ સાથે સાંધો; તો તે ત્રણ સાંધનારી લીટીઓ સરખી થશે.

(૫) જતાવો કે આ સિદ્ધાંત નવમા સિદ્ધાંતનોજ એક દર્શાંત છે.

ટીપ્પ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું અનુમાન થઈ શકે છે કે જે સીધી લીટીઓને એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

જે એમ જની શકે તો ધારો કે જે સીધી લીટી અથક અને અથક ને એક સામાન્ય ખંડ અથ છે. તો જ જિંદુમાંથી બહુ લીટી અથ ને લંબ દારો. (૧. ૧૧)



માટે <અથક=<કથક (બા. ૧૦) કારણ કે અથક એકજ લીટી છે. તેમજ <અથક=<કથક (બા. ૧૦.)

કારણકે અથક એકજ લીટી છે. ∴ <કથક=<કથક (પ્ર. પ્ર. ૧.)

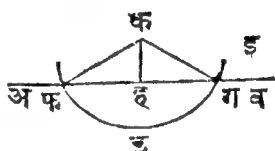
મોટો ખૂણો ન્હાનાની બરોબર, એ અશક્ય છે. માટે એ સીધી લીટીનો એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

સિદ્ધાંત ૧૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલી અમર્યાદસીધી લીટી ઉપરતેની બહારના એકઆપેલા બિંદુમાંથી એક લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે અવ એક એવી સીધી લીટી છે કે બન્ને બાજુએ લંબાવી શકાય; અને ક તેની બહાર આપેલું બિંદુ છે. તો ક બિંદુમાંથી એક લીટી અવ ને લંબ દોરવી છે.



રચના.

આપેલી લીટીની બીજી બાજુએ એક હ બિંદુ લો; ક મધ્ય બિંદુ અને કહ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ ફગહ દોરો. (સ્વી. ૩)

અને ધારો કે તે આપેલી લીટીને ક અને ગ બિંદુમાં છેદે છે.

ફગ ને હ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦)

કહ સાંધો;

{ તો કહ લીટી અવ ઉપર લંબ થશે.

કક અને કગ સાંધો.

ફહક અને ગહક ત્રિકોણોમાં,

{ ફહ લીટી ગહ ની બરોબર છે; (૨૫.)

અને હક બન્નેમાં સાધારણ છે;

અને ત્રિજી બાજુ કક ત્રિજી બાજુ કગની બરો-

{ બર છે (બ્યા. ૧૫.)

કારણ કે એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યાઓ છે;

માટે કહફ ખૂણા કહમ ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૮)

અને તે ખૂણા પાસપાસેના છે;

પણ બ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસપાસેના ખૂણા એકેકની બરોબર કરેછે, ત્યારે દરેક ખૂણા કાટખૂણા હોવો જોઈએ, માટે હ આગળના બંને ખૂણા કાટખૂણા છે. માટે આપેલા ક બિંદુમાંથી, કહ લીટી અવ ને લંબ દારી. ક. ક.

ટીપ:—આપેલી લીટી અમર્યાદ હોવી જોઈએ; કે જે વર્તુલ દોરાય તેને બે બિંદુઓમાં છેલ્લા માટે દરેક બાજુએ તે લીટી લંબાવી શકાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજુને દ્વિભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિ-બાજુ હોવો જોઈએ.

(૨) એક ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ-ઓ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજુઓને દ્વિભાગે તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ હોવો જોઈએ.

(૩) એક સમબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટીઓ સમ હોવી જોઈએ.

(૪) એક અમર્યાદ લીટી અને તેની બહારના એક બિંદુ રચેતો અંતર કેમ કઢાડવો ?

પરસ્પર પ્રશ્નો (સિદ્ધાંત ૧-૧૨.)

૧ એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયામાં બે બિંદુઓ બંને છેડેથી સમાન્તર આપ્યાં છે; તો બતાવો કે તે બિંદુઓ તે ત્રિકોણના ગાથાના શિરોબિંદુથી પણ સરખેજ અંતરે છે.

૨. એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની યાજ્ઞુઓ પરોપર હોય તો સામસામેના ખૂણા પણ પરોપરજ થશે.

૩. અવક એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણ છે, જેમાં અવ=અક; વ અને ક ખૂણાને બે લીટીઓ દુભાગે છે; અને તે લીટીએ ડ ગિંદુમાં મળે છે; તો ડઅ લીટી વઅક ખૂણાને દુભાગશે.

૪. એક સમયાળૂ ત્રિકોણની દરેક યાજ્ઞુને દુભાગીને તે ત્રણ ગિંદુઓને સાંધતાં જે ત્રિકોણ થાય તે પણ સમયાળૂ થશે.

૫ એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણ અવક ની અવ અને અક સરખી યાજ્ઞુઓ અ ખૂણાની પાર વધારી, અને તેમાં બે ગિંદુઓ એવાં લીધાં કે અફ=અક; ફવ અને ફક ગિંદુઓ સાંધ્યાં; તો ફવ=ફક થશે.

૬. એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણ અવક ની અવ અને અક સરખી યાજ્ઞુઓમાં બે ગિંદુઓ ક્ષ અને ચ એવાં લીધાં કે અક્ષ=અચ; અને કક્ષ અને વચ સાંધ્યાં, તો ડ ગિંદુમાં એકેકને છેદે છે; તો

(૧) વડક ત્રિકોણ સમઢિયાળૂ થશે.

(૨) અડ લીટી વઅક ખૂણાને દુભાગશે;

(૩) અને અડ લંબાવીશું, તો વક ને દુભાગશે અને તે ઉપર લંબ થશે.

૭. એક સમઢિયાળૂ ત્રિકોણનો પાયો અને માથાના શિરો ગિંદુ ઉપરથી પાયા ઉપર દોરેલી લંબ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ યત્રાત્રો.

૮. એક આપેલી સીધી લીટીમાં એક એવું ગિંદુ શોધી કહાડો કે તે લીટીની એકજ યાજ્ઞુએ આપેલાં બે ગિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય.

૯. ઉપલાજ પ્રશ્નમાં આપેલાં બિંદુઓ લીટીની જુદી જુદી બાજુએ લે.

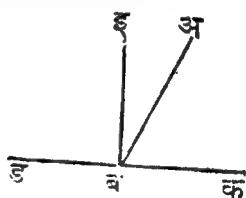
૧૦. અવક ત્રિકોણમાં અવક ખૂણા સાંકડો ખૂણો છે; તો ઘઅ માં અથવા તેને લંબાવતાં જે લીટી થાય તેમાં એક હ બિંદુ એવું શોધી કઢાડો કે $બહ = કહ$.

સિદ્ધાંત ૧૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે, તો તે બે ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ, અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરાબર હોવા જોઈએ.

સાધન.

ધારો કે અવ સીધી લીટી કહ સીધી લીટી ઉપર પડે છે;



તો પાસપાસેના ખૂણા હઘઅ, અવક બે કાટખૂણા થશે; અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરાબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) કારણ કે જો એ બે ખૂણા (આ. ૧) એકેકની બરાબર હોય તો તે ફરેક એક કાટખૂણા હોવા જોઈએ; (બા. ૧૦).

(૨) પણ જો હવઝ ખૂણા અવક ખૂણાની બરો-
બર ન હોય, (આ. ૨) તો વ ખિંદુમાંથી વહ લીટી
કહ ઉપર લંબ દોરો; (૧. ૧૧)

હવઝ ખૂણા બે ખૂણા હવઝ, હવઝ થી બનેલો છે.
માટે હવઝ ખૂણા તે બે ખૂણાની બરોબર થયો.
(પ્ર. પ્ર. ૮)

એ સમાનતામાં અવક ખૂણા ઉમેરો;

તો બે ખૂણા હવઝ અને અવક તે ત્રણ ખૂણા હવઝ,
હવઝ અને અવક ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

વળી હવક ખૂણા હવઝ અને અવક ખૂણાઓથી
થયેલો છે; અને તે માટે તેઓની બરોબર છે;

એ ફરેકમાં હવઝ ખૂણા ઉમેરો;

તો હવક અને હવઝ ખૂણા તે ત્રણ ખૂણા હવઝ હવઝ,
અને અવક ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ એજ ત્રણ ખૂણા તો બે ખૂણા હવઝ, અવક ની
બરોબર છે એમ સિદ્ધ કીધું; માટે હવઝ, અવક ખૂણા
હવઝ, હવક ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

પણ હવઝ, હવક ખૂણાતો બે કાટખૂણાની બરોબર છે;
(આ. ૧૦)

માટે હવઝ, અવક ખૂણા પણ બને મળીને બે કાટ-
ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧) પ્ર. સિ.

ટીપ:—પ્રતિષ્ઠા તપાસી જોતાં જણાશે કે બે લીટીઓ એકેક
સાથે મળીને એકજ સીધી લીટી થઇ જાય, અથવા એકને
છેડે બીજાને છેડે મળી જાય, એવી બે લીટીઓનો વિચાર
આ સિદ્ધાંતમાં કરવાનો નથી.

આ સિદ્ધાંતમાં એમ સાબિત કરવાનું છે કે જે ખૂણા થશે તે દરેક એકેક કાટખૂણા થશે; અથવા તો તે જે ખૂણા મળીને જે કાટખૂણા બરોબર થશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે એક લીટીને જીજી એકજ લીટી ન મળે, પણ ધણીક લીટીઓ એકજ ગિંદુ આગળ મળે તો જોડલા ખૂણા થશે તે બધા મળીને પણ જે કાટખૂણા બરોબરજ થશે, એ ઉપસિદ્ધાંતની આકૃતિ દોરવાથી સમજણ વધારે પડશે.

વ્યાખ્યા. (૧) જ્યારે જે ખૂણાઓનો સર્વાળો જે કાટખૂણું બરોબર હોય, ત્યારે તેઓ ન્યૂનતાપૂરક છે એમ કહેવાય છે, અને તેમાંનો એક ખૂણો જીજીના ન્યૂનતાપૂરકસ્વૂળો કહેવાય.

(૨) જે જે ખૂણાઓનો સર્વાળો એક કાટખૂણું બરોબર હોય તો તેઓ કોટી સ્વૂળા કહેવાય છે; અને એક ખૂણો જીજીનો કોટી કહેવાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના પાયાને બન્ને બાજુએ લંબાવતાં જે ખૂણા થાય તે સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમઘિકોણ હોવો જોઈએ.

(૨) એક લીટી જીજી લીટી સાથે જે જે ખૂણા કરે છે તે બન્નેને દુભાગિયે તો દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થશે.

(૩) ઉપરનો પ્રશ્ન ધણો અગત્યનો છે. તે આવી રીતે પણ લખાય:—

એક ખૂણાને અંદરથી અને બહારથી દુભાગનારી લીટીઓ એકેકને લખ છે.

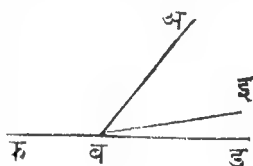
(૪) દુભાગનારી દરેક લીટી સાથે આપેલી લીટીઓ જે ખૂણા કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

સિદ્ધાંત ૧૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એકજ સીધી લીટીને એકજ બિંદુ આગળ પણ વિરુદ્ધ બાજુઓ તરફ બે બીજી સીધી લીટીઓ મળીને જે પાસપાસેના ખૂણાઓ કરે તેઓનો સર્વાળો જો બે કાટખૂણા બરોબર હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓથી એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.

સાધન.

અવ સીધી લીટીનાવબિંદુ આગળ વક અનેવડ બે સીધી લીટીઓ વિરુદ્ધ દિશાઓથી આવીને અવક, અવડ ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર કરે છે; તો વક અને વડ લીટીઓ મળીને એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.



સિદ્ધતાં.

કેમકે, જો વડ લીટી વક લીટી સાથે એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં ન હોય, અને જુદીજ લીટીમાં હોયશકે તો એમ ધારે કે કબ ને લંબાવતાં તે વડ દિશામાં નહિ, પણ વડ દિશામાં જશે.

તો કબજ એકજ સીધી લીટી છે;

અને તેને અવ લીટી મળે છે;

માટે પાસપાસેના ખૂણાઓ અવક, અવડ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૧૩)

પણ અવક અને અવડ ખૂણાઓ પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે અવક, અવક ખૂણા મળીને અવક અને અવક
ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

એ સરખા ખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો અવક
બાદ કરે;

તો બાકીનો ખૂણો અવક બાકીના ખૂણા અવક ની
બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૨,)

એટલે આખો ખૂણો તેના ન્હાના ભાગની બરો-
બર છે; એ અશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર. ૬.)

માટે વક્રને લંબાવી શુતોચની દિશામાં જશે નહિ;
અને એવીજ રીતે આપણે સિદ્ધ કરી શકીશું કે વક્ર
શિવાય કોઈપણ દિશામાં વક્ર ને લંબાવવી અશક્ય
છે; માટે વક્ર અને વક્ર બંને મળીને એકજ અખંડ
સીધી લીટીમાં હોવી જોઈએ. પ્ર. સિ.

ટીપ્પ:-(૧) આ સિદ્ધાંતનો પુરવો અથવા સાબિતી ૭ માં
સિદ્ધાંતના જેવી છે. પ્રતિજ્ઞામાં કહ્યા પ્રમાણે જો બે લીટીઓ
ત્રિજીને મળે તો તે બે મળીને એકજ સીધી લીટીમાં હોવી
જોઈએ. જો એમ ધારિયે કે તેમ નથી, તો એવાં અનુમાનનું
છેવટ અશક્ય આવે છે; માટે એવું વિરૂદ્ધ અનુમાન ખોટું.

(૨) આ સિદ્ધાંત તેરમાથી ઉલટો છે.

પ્રશ્નો.

(૧) એજ સિદ્ધાંત હવે લીટી વ બિંદુ પાર વધારીને
સાબિત કરો.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં વિરૂદ્ધ શબ્દ લખવો અવશ્ય છે તે બ-
તાવો; એકજ જાગ્યુંએ એવી લીટીઓ મળી શકે કે કેમ ?

ત્રિકોણ પહેલાની અંદર પડે છે, તે બતાવે કે અવકાશ ખૂણો = અકાશ ખૂણો.

(૩) ઉપલોચ પ્રશ્ન જે સમદ્વિગામ્ય ત્રિકોણો પાયાની જૂદી જૂદી બાજીએ લખતે સાબિત કરો.

(૪) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજીએ જે સમદ્વિગામ્ય ત્રિકોણો કઢાડ્યા હોય તે બતાવે કે એકનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની કોઈ પણ બાજીના ઉપર પડી શકે નહિ.

(૫) ઉપરો સિદ્ધાંત ઘણી સહેલાઈથી ૪ થા સિદ્ધાંતના ૪ થા પ્રશ્નની સહાયથી થઈ શકે છે, તે બતાવો.

(૬) એજ સિદ્ધાંત સમગામ્યો ન વધારતાં, તે બાજી-ઓમાં ૬ અને ૬ બિંદુઓ અ થી સરખે અન્તરે લખતે સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૬ ફોની સમજણ.

જે જે પ્રમેયોમાં એકનું પક્ષ બીજાનું સાધ્ય હોય અને પેહેલાનું સાધ્ય બીજાનું પક્ષ હોય તે તે જે પ્રમેયો એકેકના વ્યત્યાસ કહેવાય; વ્યત્યાસ એટલે ઉલટા; પાંચમો સિદ્ધાંત અને છઠ્ઠો વ્યત્યાસ છે એમ તેમની પ્રતિજ્ઞાઓ જોવાથી જણાશે; એટલે પાંચમાનું પક્ષ (કર્તા અથવા આપેલું) તે છઠ્ઠાનું સાધ્ય (ક્રિયાપદ, માગેલું) છે, અને પાંચમાનું સાધ્ય છઠ્ઠાનું પક્ષ છે.

છઠ્ઠો સિદ્ધાંત ઉલટ પક્ષનો છે, માટે તેની સિદ્ધતા પણ ઉલટી રીતની છે; યુક્તિડની ભૂમિતિમાં ઘણી વેળાએ વ્યત્યાસ સિદ્ધાંતો ઉલટ સિદ્ધતાથીજ સાબિત કર્યા છે. સૂત્રી સિદ્ધતાના દાખલા તો આપણે ઉપર જોયા; હવે ઉલટી સિદ્ધતા કેવા પ્રકારની છે તે જોવાનું રહ્યું; ધારો કે એમ સાબિત કરવું છે કે અ

ચોપડી વ કરતાં મોટી છે; તો જો આપણે સિદ્ધ કરિયે કે અ
અને વ બરોબર હોઈ નજ શકે; તેમજ અ ચોપડી વ કરતાં
ન્હાની પણ હોઈ નજ શકે; તો સ્પષ્ટ છે કે અ ચોપડી વ
કરતાં મોટી હોવીજ જોઈએ. તેમજ ધારો કે અ ખૂણા વ ની
બરોબર છે એવું સિદ્ધ કરવું છે; તો પહેલાં એવું સિદ્ધ કરી
બતાવિયે કે જો અ ખૂણા વ કરતાં મોટો હોય તો કંઈ સ્પષ્ટ
અસંભાવ્યતા નિકળે; તેમજ અ, વ કરતાં ન્હાનો હોય તો પણ
તેવીજ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે. ત્યારે નક્કીજ સિદ્ધ થયું કે
અ અને વ બરોબરજ હોવા જોઈએ. આ જાતનો પુરાવો
કદાચ શરૂઆતમાં ગુંચવણુ જેવો અથવા અનિશ્ચિત જેવો
લાગશે; પણ વિચાર કરતાં જણાશે કે એમાં કંઈ અનિશ્ચિત-
પણું નથી. સૂત્રકા પુરાવા જેટલોજ એ મજબૂત પુરાવો છે;
તોપણ જ્યાં સૂધી સૂત્રકા પુરાવો મળી આવે છે ત્યાં સૂધી
એવો પુરાવો વપરાતો નથી.

સિદ્ધાંત ૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણના બેખૂણાઓ બરોબર
હોય, તો તેઓની સામેની બાજુઓ પણ બરોબર છે.

સાધન,

અવક ત્રિકોણનો અકબ ખૂ-
ણો અવક ખૂણાની બરોબર છે;
તો અવ બાજુ અક બાજુની
બરોબર થશે.

રચના.



જો અવ, અક ની બરોબર
ન હોય તો એ બેમાંની એક બાજુ ખીલ કરતાં
મોટી હોવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે, તો ધારો કે
અવ બાજુ અક કરતાં મહોટી છે.
તો અવ માંથીવડ ભાગ અક જેટલો કાપો. (૧. ૩).
ક, ડ બિદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

ડબક અને અવક ત્રિકોણોમાં,
ડબ લીટી અક ની બરોબર છે. (૨૫.)
અને વક લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે.
અને ડબક ખૂણે અકબ ખૂણાની બરાબર છે. (પ્રતિ)
માટે એક ત્રિકોણની ડબ, વક બાજુઓ અને અન્ત-
ખૂણે ડબક બીજાની અક, વક બાજુઓ અને અન્ત-
ખૂણે અકબ નો બરોબર અનુક્રમે છે.
માટે ડબક ત્રિકોણ અકબ ની બરોબર થયો; (૧. ૪)
આખો પોતાના ભાગની બરોબર;
એ અશક્ય છે. (પ. પ્ર. ૯.)

માટે આપણે અવ બાજુ અક કરતાં મહોટી ધારી
એ ખોટું;
તેમજ અક બાજુ અવ કરતાં મહોટી હોય એ
અશક્ય છે એમ સિદ્ધ કરી શકીશું.
માટે અવ બાજુ અક કરતાં મહોટી પણ નથી અને
નહાની પણ નથી.

એટલે અવ બાજુ અકની બરોબર છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:-જો ત્રિકોણ સમકોણ હોય તો તે સમબાજુ છે.

ટીપ:-રચનામાં અવ મોટીમાંથી અક ન્હાની બરોબરનો ભાગ કાપ્યો, તે ક્રિયા છેડાથી અ થી કે વ થી તે યાદ રાખવું.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતમાં કેવા પ્રકારની સિદ્ધતા વાપરી છે? તેનું કારણ શું?

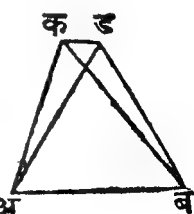
(૨) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાઓને દ્વિભાગનારી લીટીઓથી જે બાજો ત્રિકોણ તેજ પાયા ઉપર થશે, તે પણ સમદ્વિબાજુ થશે.

સિદ્ધાંત ૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ દિશાએ બે એવા ત્રિકોણો થઈ શકે નહિ કે જેઓની તે પાયાના એક છેડામાં મળતી બે બાજુઓ એકેકને સરખીજ હોય, અને વળી એકી વખતે બીજા છેડામાં મળતી બે બાજુઓ પણ એકેકને સરખીજ હોય.

સાધન.

જો એમ બની શકતું હોય તો એકજ પાયા અવ ઉપર, અને તેની એકજ બાજુએ બે ત્રિકોણો અકવ અને અડવ એવા દોરો કે પાયાના અ બિંદુમાં આવી મળતી તેઓ-



ની અક અને અડ બાજુઓ એકેકની બરોબર થાય,

અને વળી વ બિંદુમાં મળતી વક્ર અને વડ બાજુ
ઓ પણ એકેકની બરોબરજ થાય.

પહેલું-એમ ધારો કે દરેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ
બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે; તો ક,ડ બિંદુઓ સાંધો.
(સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

અકડ ત્રિકોણમાં અક બાજુ મઢની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
માટે અકડ ખૂણો મઢકની બરોબર છે. (૧. ૫)
પણ આખો ખૂણો અકડ તેના ભાગ વકડ કરતા
મોટો છે (૫. ૫. ૯.)

માટે અકડ ખૂણો પણ વકડ કરતાં મોટો છે;
ત્યારે વકડ ખૂણો તો વકડ કરતાં ઘણુંજ મોટો
હોવો જોઈએ.

પણ વકડ ત્રિકોણમાં,

વક બાજુ વડ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે વકડ ખૂણો વકડ ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ તે તો આપણે વકડ કરતાં ઘણું મોટો છે
એવું ઉપર બતાવ્યું;

માટે ઉપર પ્રમાણે આકૃતિ દોરવાથી આ અશક્ય
પરિણામ આવ્યું:-કે એકજ ખૂણો બીજા કરતાં મોટો
પણ છે અને તેની બરોબર પણ છે; માટે આપણે જે
ધારણા પ્રમાણે ઉપર બે ત્રિકોણો દોર્યા તે અશક્ય છે;
એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય નહિ.

બીજું-એવું ધારો કે એકનું શિરોબિંદુ ડ બીજા
ત્રિકોણની અંદર પડે છે, તો

રચના.

ક, ડ સાંધો (સ્ત્રી. ૧)

અને અક, અડ ને ફ, ફ સુધી
સંખાવો. (સ્ત્રી. ૨)

સિદ્ધતા.

અકડ ત્રિકોણમાં, અક

ખાજૂ અડ ની બરોબર છે (પ્રતિ.)

માટે, પાયાની બીજી ખાજૂના ખૂણાઓ ફકડાને
ફડક બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ ફકડ ખૂણા તેના ભાગ વકડ કરતાં મોટો છે.
(પ્ર. પ્ર. ૯).

માટે ફડક ખૂણા પણ વકડ કરતાં મોટો છે.

ત્યારે વડક ખૂણા તે વકડ ખૂણા કરતાં ઘણું
મોટો થયો.

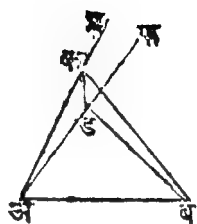
પણ વકડ ત્રિકોણમાં, વક ખાજૂ વડની બરોબર છે,
(પ્રતિ.)

માટે વડક ખૂણા વકડ ખૂણાની બરોબર હોવો
જોઈએ. (૧. ૫)

પણ તે તે ઉપર આપણે એના કરતાં મોટો છે
એમ બતાવ્યું;

એ એકેકથી ઉલટી વાત બનવી અશક્ય છે.

ત્રિજનું-એકનું શિરોબિંદુ ડ, પહેલા ત્રિકોણની કબ
ખાજૂના ઉપર પડે તે દેખીતુંજ અશક્ય છે, કારણ
કે તેમ હોય તો નહાની લીટી ડબ મોટી લીટી કબ નો
બરોબર થઈ જાય.



માટે આપણે જોયું કે એકજ પાયાની એકજ દિ-
શાએ બે એવા ત્રિકોણો દોરવા અશક્ય છે કે જેઓ-
ની ધૃ

પ્ર. સિ.

ટીપ:—એકજ બિંદુમાં મળતી લીટીઓને સીમાવાસી કહે
છે. ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વોમાં આ સિદ્ધાંત આવતો સિદ્ધાંત સિદ્ધ
કરવા માટેજ લખેલો દેખાય છે. એવી સિદ્ધતા જરૂર નવાઈ
જેવી છે. અને એવી કવચિત્તજ વાપરવામાં આવે છે. આ
સિદ્ધાંતનો સીધો પુરાવો નથી; અને પુરાવામાં ગુચ્ચવણ
પડવાનું કારણ દેખીતું છે કે નકાર વસ્તું સાબિત કરવી છે;
એટલે એમ જતાવવું છે કે એક અમુક જાતના ત્રિકોણો
થઈ ન શકે. પુરાવો એવી રીતે આપ્યો છે કે, ધારો કે
તેમ થઈ શકે, તો તેથી એક અસંભવિત અનુમાન નિકળશે.
પણ એવું અશક્ય અનુમાન તો સ્વીકારાયજ નહિ; માટે જે
ધારણાને લીધે આવા પરિણામ ઉપર આપણે આવી પહોંચ્યા
તે ધારણા ખોટી હોવી જોઈએ.

ઉપરના સિદ્ધાંતમાં સાબિત કરવું છે કે જેવા ત્રિકોણો ક-
હેલા છે તેવા દોરી શકાય નહિ. જો એવા દોરી શકાતા હોય
તો દોરો. હવે એવા ત્રિકોણો ત્રણ રીતે દોરી શકાય; માટે
ત્રણ રીતે દોરવા અશક્ય છે એવું સાબિત કરીશું છે. જો એવા
ત્રિકોણો દોરી શકાય તો એવું જતાવ્યું છે કે એકનો
એકજ ખૂણો એક બીજા અમુક ખૂણા કરતાં મોટો પણ
હોવો જોઈએ, અને વળી તેની જરોજર પણ હોવો જોઈએ.
પણ એતો અશક્ય અનુમાન છે; માટે જે આપણે પહેલાં
સાચું માની લીધું તેમાં ભૂત કરીની. એક છેડે મળતી બે બા-
જુઓ પણ સરખીજ હોય એ જાનવું અશક્ય છે.

યાદ રાખવું કે ગમે તે એક છેડામાં મળતી બે બાજુઓ
સરખી હોય તો તેમાં કંઈ બાધ નથી, તેમ તો થઈ શકે;

અક અને અડ સરખી હોઈ શકે, પણ ત્યારે વક અને વડ સરખી થાયજ નહિ.

પ્રશ્નો.

(૧) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ બે સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણો કઢાડિયે તો એકનું શિરોબિંદુ બીજાની અંદર પડવું જોઈએ.

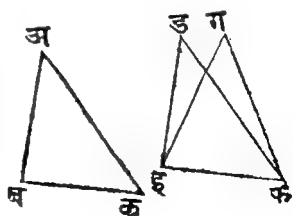
(૨) આ સિદ્ધાંતમાં આપેલી ચાર શરતો જૂદી જૂદી લખો; અને જતાવો કે તેમાંની એક પણ શરત છોડિયે તો સિદ્ધાંત ખોટો પડી જશે.

સિદ્ધાંત ૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરોબર હોય, અને વળી તેમના પાયા એટલે ત્રીજી બાજુઓ પણ બરોબર હોય, તો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓની વચ્ચેના અંતર્બિંદુ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓના અંતર્બિંદુની બરોબર થશે.

સાધન

ધારો કેઅબક અને ડઈફ બે એવા ત્રિકોણો છે કે અબ, અકબાજુઓ અનુક્રમે ડઈ, ડફ બાજુઓની બરોબર છે; એટલે અબ, ડઈ ની બ-



રોબર, અને અક, ડફ ની બરોબર; અને વક પાયા ઇફ પાયાની બરોબર છે; તો વચક ખૂણા ઇડફ ખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

જો અવક ત્રિકોણ (ઉચ્ચકીને) હફ ત્રિકોણ ઉપર
એવી રીતે મૂકિયે કે બ બિંદુ હ બિંદુ ઉપર પડે, અને
બક સીટી લીટી હફ ની દિશામાં પડે,

તો ક બિંદુ ક બિંદુ ઉપરજ પડશે,

કારણ કે બક લીટી હફ ની બરોબર છે; (પ્રતિ,)

અને બક લીટી હફ ઉપર પડેછે, માટે

બઅ, અક લીટીઓ પણ હફ, હફના ઉપરજ પડશે;

કારણ કે, જો તેમ ના પડે, તો ધારો કે તે લીટીઓ

બીજેજ રથજે, હા, ગફ ની દિશાએ પડેછે.

હવે હા અને હફ દરેક અબ ની બરોબર છે.

અને કહ, કઅ, દરેક અક ની બરોબર છે, માટે

હફ લીટી હા બરોબર, અને કહ લીટીકા બરોબર;

(પ્ર. પ્ર. ૧.)

ત્યારે તો એકજ પાયા હફ ઉપર અને તેની એકજ
બાજુએ બે ત્રિકોણો હફ, હા, એવા થયા કે હ

બિંદુમાં મળતી બાજુઓ સરખી થઈ, અને વળી ક

બિંદુમાં મળતી બાજુઓ પણ સરખી થઈ. એ બનવું

અશક્ય છે. (૧, ૭)

માટે અઅ, અક લીટીઓ હફ, હફ ના ઉપરજ પડવી
જોઈએ;

અને બીજી કોઈ રીતે પડી શકે નહિ.

પણ જો તેમ હોય ત્યારે તો અ બૂણાડ ના ઉપરજ

પડે; એટલે અઅ, અક હફ ની બરોબર છે.

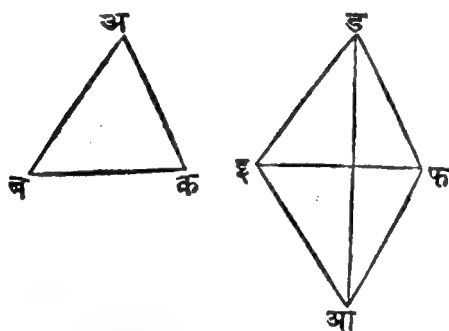
(પ્ર. પ્ર. ૮)

માટે જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ ઈ પ્ર. સિ,

ઉપસિદ્ધાંત:-ઉપલા સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુઓની બરોબર હોય તો તે ત્રિકોણ પણ એકે કની બરોબર છે.

ટીપ:-ઉપલી સિદ્ધતાનો આધાર પણ ઉલટ પુરાવા ઉપર રહેલો છે; અને વળી ૭ મા સિદ્ધાંતની સહાયથી સિદ્ધ થયો છે, જે સિદ્ધાંત સમજવો જરા કઠિન છે, માટે એજ સિદ્ધાંત નીચેની રીતે પણ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

અવક ને હફ ઉપર એવી રીતે મૂકો કે જ િંદુ હ



ઉપર પડે; અને જક લીટી હફ ની દિશાએ પડે; અને તેનું અ સિરોગિંદુ હફ ની પાયાની બીજી બાજુ ઉપર પડે.

હવે જક લીટી હફ ની બરોબર છે, માટે ક િંદુ'ફ ઉપરજ પડશે.

ત્યારે જઅક ત્રિકોણ હઆફ સ્થિતે પડશે.

હઆ સાંધો. હઆ=અજ (૨૫.)

પણ હહ=અજ (પ્રતિ.) ∴ હઆ=હહ (પ્ર. પ્ર. ૧)

∴ <ઈડઆઝ<ઈઆડ (૧. ૫)

તેમજ ડફ જરોજર આફ ∴ <આડફ=<ફઆડ.

∴ આખો ખૂણો ઇડફ=ઈઆફ (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ <ઈઆફ=<વઅક (પ્રતિ.) ∴ <ઈડફ=<વઅક.

પ્ર. સિ.

જો ક અને ફ ખૂણા પહોળા ખૂણા હોય તો ડઆ લીટી ત્રિકોણની બહાર પડશે, અને તેઓ કાટખૂણા હોય તો ડફ અને ફઆ જોડાઈને ડઆ થશે, પણ સિદ્ધતા તો ઉપર પ્રમાણેજ રહેશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમગ્યાળૂ ચતુષ્કોણનો કર્ણ જે ખૂણાઓ સાંધે છે તે ખૂણાને દ્વિભાગે છે.

(૨) એક સમગ્યાળૂ ચતુષ્કોણના કર્ણ એકેકને દ્વિભાગે છે, અને એકેક ઉપર લંબ છે.

(૩) સમદ્વિગ્યાળૂ ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ તેના શિરોબિંદુ સાથે એક લીટીથી સાંધ્યું તો તે લીટી શિરોબિંદુને તથા ત્રિકોણને દ્વિભાગશે અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધાંત ૯. કૃત્ય.

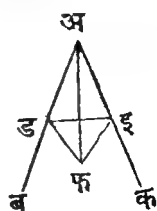
પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલા સીધીલીટી ખૂણાને દ્વિભાગવો, એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે વઅક આપેલો ખૂણો છે; તેને દ્વિભાગવો છે.

રચના.

અબ લીટીમાં એક ડ બિંદુ લો;



અને અક લીટીમાંથી અહ ભાગ અહ બરોબર
કાપેા. (૧. ૩)

હ અને હ સાંધો. (સ્વી. ૧)

અને હહ લીટી ઉપર અ બિંદુની સામેની તરફ
એક સમખાળૂ ત્રિકોણ હફહ દારો. (૧. ૧.)

અ અને ક સાંધો. (સ્વી. ૧)

તો અક લીટી વચ્ચે ખૂણાને દ્વિભાગશે.

સિદ્ધતા.

હઅક અને હઅક ત્રિકોણોમાં હઅ લીટી હમ ની
બરોબર છે. (૨૫.)

અને અક બન્નેમાં સાધારણ છે.

અને ત્રીજી બાજુ હક ત્રીજી બાજુ હકની બરો-
બર છે. (૨૫ના.)

માટે હઅક ખૂણો હઅક ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૮)

માટે આપેલા ખૂણા વચ્ચે ના અક લીટીથી બે
સરખા ભાગ થયા. ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) એજ આકૃતિમાં બતાવે કે અક લીટી હફહ ખૂણો
પણ દ્વિભાગે છે.

(૨) એક આપેલા ખૂણાના ચાર સરખા ભાગ કરો.

(૩) બે હફહ ત્રિકોણ અ શિરોબિંદુવાળી બાજુએ કહા-
ડ્યો હોય તો પણ સિદ્ધાંત સિદ્ધ થઈ શકે છે.

(૪) પણ તેમ કરતાં એક અમુક પ્રસંગે ખાધ આવે છે
તે શ્યારે ?

(૩) એક સમખાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણદુભાગીને તે બિંદુમાંથી સામેના બન્ને ખૂણા સુધી બે લીટીઓ દોરિયે તો તે બે લીટી એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સિદ્ધાંત ૧૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે તો સામસામેના ખૂણા બરાબર થશે.

સાધન.

ધારો કે અવ અને કડ સીધી લીટીઓ એક બીજીને હ બિંદુમાં છેદે છે;

તો અડક ખૂણા હરબ ખૂણાની બરાબર થશે,

અને કડબ ખૂણા અડક ખૂણાની બરાબર થશે.



સિદ્ધાંત.

અહ લીટી કડ લીટી સાથે પાસપાસેના ખૂણા કડબ, અડક કરે છે; માટે તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરાબર છે. (૧. ૧૩)

અને વળી હર લીટી અવ લીટીની સાથે અડક, હરબ ખૂણા કરે છે; માટે તે બે ખૂણા મળીને પણ બે કાટખૂણા બરાબર છે.

માટે કડઅ, અડક ખૂણાઓ અડક, હરબ ખૂણાઓની બરાબર છે. (પ. પ્ર. ૧.)

એ સમખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણા અડક બાદ કરે;

તો બાકી રહેલો ખૂણો કહા બાકી રહેલો ખૂણો હવ
ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩)

એજ પ્રમાણે વઢક ખૂણો અહઢ ખૂણાની બરોબર
સિદ્ધ થઈ શકે.

માટે જે જે સીધી લીટીઓ ૪૦ પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. આ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે જે જે સીધી લીટી-
ઓ એક ખીજને છેદે, તો છેદવાના બિંદુ આગળ જે ખૂણાઓ
થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ઉ. સિ. ૨. તેમજ ગમે એટલી સીધી લીટીઓ એકજ
બિંદુ આગળ એકેકને છેદે તો તે બિંદુ આગળ જેટલા ખૂણા-
ઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ટીપ:- (૧) આ સિદ્ધાંતને સંક્ષેપમાં બતાવિયે, તો એમ
કહેવાય કે, સામસામેના ખૂણાઓનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો સા-
ધારણ છે તેથી તે ખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) આ સિદ્ધાંત ખૂણાની વ્યાખ્યાનો માત્ર વધારો છે
એમ કહી શકાય. જે સીધી લીટીઓ એક ખીજને
મળે ત્યારે તેઓની વચ્ચેનો ઝાંક તે એક ખૂણો થયો, પણ તે
ખૂણાના શિરોબિંદુની પાર તે લીટીઓને વધારિયે તોપણ તે
ખૂણો કાંઈ બદલાતો નથી, એવું આ સિદ્ધાંતમાં બતાવ્યું છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના ઉલટ પક્ષની પ્રતિજ્ઞા લખો, અને તે
સિદ્ધ કરો.

(૨) ઉપજા જે ઉપસિદ્ધાંતોની આકૃતી દોરો અને સિદ્ધ કરો.

(૩) અરસ્પરસ છેદનારી જે લીટીઓના કોઈ મણુ સા-
મસામેના ખૂણાઓને દુભાગનારી જે લીટીઓ એકજ
અખંડ સીધી લીટીમાં ઢોવી બોધ્યો.

(૪) એક ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાઓની બન્ને બાજુઓ ઉપર લંબ દોરી, તો તે લંબોની વચ્ચેનો ખૂણો આપેલા ખૂણાની બરાબર થશે, અથવા તે ખૂણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો થશે.

(૫) જે ચતુષ્કોણની કણી એકેકને દુભાગે તેની સામસામેની બાજુઓ બરાબર છે.

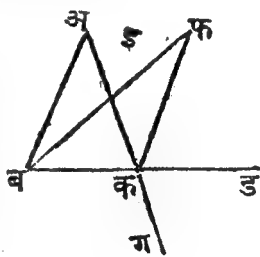
(૬) એક ત્રિકોણની અંદર એક બિંદુ લઇને તેને ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાથે જોડીએ, તો તે બિંદુ આગળના ખૂણા બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરાબર થશે.

સિદ્ધાંત ૧૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-જે કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવી તો બહારનો ખૂણો માંહેના સામસામેના ખૂણા માંહેલા કોઈ પણ એક કરતાં મોટો થશે.

સાધન

અવક એક ત્રિકોણ છે; જેની વક બાજુ ડ બિંદુ સુધી લંબાવી, તો બહારનો ખૂણો અકડ માંહેના સામસામેના કવચ, વચક દરેક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.



રચના.

અક બાજુને દ બિંદુમાં દુભાગો, (૧. ૧૦.)
 બહ સાંધો; અને તેને ક બિંદુ સુધી લંબાવો, અને
 દફ લીટી બહ લીટી જેટલી કરો. (૧. ૩)
 કક બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અહવ, કફ ત્રિકોણમાં, અહ લીટી કહ નીંખરો-
ખર છે, (૨૫.)

અને હવ લી ૧ ફ ની ખરોખર છે, (૨૫.)

અને અહવ ખૂણા સામેના ખૂણા કફ ની ખરો-
ખર છે, (૧ ૧૫.)

માટે અહવ ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે કફ ત્રિકોણનીખ-
રોખર છે. (૧. ૪)

માટે વઅહ ખૂણા ફક ખૂણાની ખરોખર છે.

પણ ફકડ ખૂણા ફક ખૂણા કરતાં મોટો છે.

માટે ફકડ ખૂણા વઅહ ખૂણા કરતાં પણ મોટો છે.

એટલે બહારનો ખૂણા અકડ માંહેલા ખૂણા વઅક
કરતાં મોટો છે.

એવીજ રીતે, બે વક ને દુલાગીને અક લીટી ન બિંદુ
સુધી વધારીશું, તો વક ને ખૂણા અવક ખૂણા કરતાં
મોટો સિદ્ધ કરીશું.

પણ વક ને ખૂણા તો અકડ ખૂણાની ખરોખર છે; (૧.૧૫)

માટે અકડ ખૂણા પણ અવક ખૂણા કરતાં મોટો છે.

માટે બે કોઈ ત્રિકોણની ધૃ

પ્ર૦ સિ૦

પ્રશ્ન.

(૧) અકડ ખૂણા અવક કરતાં મોટો છે તે આકૃતિ
દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ અ આગળનો બહારનો ખૂણા વ ખૂણા
કરતાં મોટો છે તે સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ત્રિકોણનો પ્રત્યેક ખૂણો ખીજ ખૂણાઓ માંહેલા હરેકના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણા કરતાં ન્હાનો છે.

(૪) એક ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણું અથવા પહોળા ખૂણો હોય તો ખીજ ખૂણા સાંકડા હોવા નેમએ.

(૫) એક બહારના બિંદુમાંથી એકજ સીધી લીટી ઉપર બે-સંખ્ય દોરી શકાય નહિ.

(૬) એક સમબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો અંદરના પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મ્હોટો હોવો નેમએ, તથા તે ખૂણો પહોળો ખૂણોજ હોવો નેમએ.

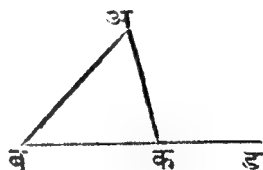
(૭) એક સમઘ્રિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખૂણાઓ સાંકડા ખૂણાજ હોવા નેમએ.

સિદ્ધાંત ૧૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

સાધન

અવક એક ત્રિકોણ છે; તેના કોઈ પણ બે ખૂણા, જેવા કે અવક, અકચ બન્ને મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.



રચના.

બક બાજુને ડ બિંદુ સુધી લંબાવો.

સિદ્ધતા.

અકડ ખૂણો અવક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો છે, માટે તે માંહેલા સામેના ખૂણા અવક કરતાં મ્હોટો છે.
(૧. ૧૬)

એ દરેક ખૂણામાં અકબ ખૂણો ઉભરો;

ત્યારે અકડ, અકબ ખૂણાઓ અકબ, અકબ ખૂણાઓ કરતાં મોટા છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ પાસપાસેના અકડ, અકબ ખૂણાઓ બે કાટખૂણાની બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે અકબ, અકબ ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણાઓ કરતાં ઓછા છે.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઇ શકશે કે હરકોઇ બે ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના કોઇપણ ૬૦ ગ્ર. સિ.

ટીપ:—(૧) આ સિદ્ધાંત ૧૬ માનો માત્ર ઉપસિદ્ધાંતજ છે.

(૨) સિદ્ધાંત ૧૬-૧૭ બન્ને ૩૨ મા સિદ્ધાંતમાં સમાઇ જાય છે, તે તે સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞા વાંચવાથી જણાશે.

(૩) આ સિદ્ધાંત ઉપરથી જણાય છે કે કોઇ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડાખૂણા તો હોવાજ નોંધ્યો.

(૪) આ સિદ્ધાંત ૧૨ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણનો ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતની અને બારમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની પ્રતિજ્ઞાઓ એવી રીતે લખો કે તે ઉપરથી એક બીજાના ઉલટ પક્ષ છે તે દેખાઈ આવે.

(૨) ત્રિકોણના એક સિરોબિંદુને સામેની બાજુના કોઇપણ બિંદુ સાથે સાંધીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) જો એક ત્રિકોણની કોઇપણ બે બાજુઓ લંબાવી તો બહારના બે ખણાઓ બે કાટખૂણા કરતાં વધારે થશે.

(૪) એક ત્રિકોણના એક સિરોબિંદુમાંથી એક લંબ પાયા ઉપર દોરી, તો તે લંબ ત્રિકોણની અંદર કયારે પડશે અને બહાર કયારે પડશે ?

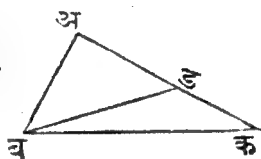
સિદ્ધાંત ૧૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—કોઈપણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજુ ખીણ કરતાં મોટી હોય તો મોટી બાજુની સામેના ખૂણા નહાની બાજુની સામેના ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

ધારો કે અવક એ ત્રિકોણ છે, જેની અક બાજુ અવ કરતાં મોટી છે.

તો અવક ખૂણા અકબ ખૂણા કરતાં મોટો થશે.



રચના.

મોટી અક માંથી નહાની અવ જેટલો એક ભાગ અડ કાપો; (૧. ૩)

ચઢ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અવડ ત્રિકોણમાં અવ બાજુ અડની બરોબર છે, માટે અવડ ખૂણા અડબ ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ ચઢક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણા અડબ માંહેલો ખૂણા ડકબ એટલે અકબ કરતાં મોટો છે;

માટે અવડ ખૂણા પણ અકબ ખૂણા કરતાં મોટો છે; ત્યારે અવક ખૂણા તો અકબ ખૂણા કરતાં ઘણો મોટો હોવો જોઈએ.

માટે કોઈ પણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજુ ધ૦પ્ર૦સિ૦

પ્રશ્ન.

(૧) નહાની બાજુ અવ વધારીને અક જેટલી બનાવીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) આ સિદ્ધાંતની મદદથી છઠ્ઠો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ચતુષ્કોણાકૃતિમાં ચારેમાં મ્હોટી અને ચારેમાં ન્હાની બાજુઓ એક બાજુની સારે હોય, તો એવું બતાવો કે તે ન્હાની બાજુ ઉપરનો પ્રત્યેક ખૂણો તેના સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

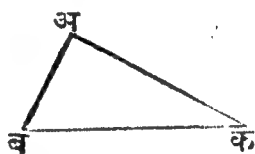
સિદ્ધાંત ૧૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો બીજા કરતાં મ્હોટો હોય તો મ્હોટા ખૂણાની સામેની બાજુ ન્હાના ખૂણાની સામેની બાજુ કરતાં મ્હોટી થશે.

સાધન.

ધારો કે અવક ત્રિકોણમાં અવક ખૂણો અકબ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

તો અક બાજુ અવ બાજુ કરતાં મ્હોટી થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે જો અક બાજુ અવ કરતાં મ્હોટી ન હોય, તો અક બાજુ અવની બરોબર હોય અથવા અવ કરતાં ન્હાની હોય.

પણ અક બાજુ અવની બરોબર તો હોઈ ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો અવક અને અકબ ખૂણા બરોબર થાય. (૧.૫)

પણ તે ખૂણાઓ કાંઈ બરોબર નથી. (પ્રતિ.)
વળી અક બાજુ અવ કરતાં ન્હાની પણ હોઈ ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો અવક ખૂણો અકબ કરતાં ન્હાનો થાય. (૧.૧૮)

પણ તેમ તો નથી.

(પ્રતિ.)

માટે અક લીટી અવની બરોબર પણ નથી અને તેથી ન્હાની પણ નથી;

એટલે અક બાજુ અવ કરતાં મ્હોટી છે

માટે જે કોઇ ત્રિકોણમાં અંક ખૂણા ૪૦ પ્ર સિ.

ટીપ્—૧૮મા તથા ૧૯મા સિદ્ધાંતમાં પેહેલો ક્યો અને બી-
જે ક્યો એ સ્મરણમાં રાખવું મુશ્કેલ લાગે છે માટે યાદ
રાખવું કે ૧૮ મો ૫ મા પ્રમાણે છે અને ૧૯ મો છઠ્ઠા પ્રમાણે છે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કઇ બાજુ સર્વથી મ્હોટી ?

(૨) એક અવકસમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો ચક્ર પાયો હ
ખિંડુ સૂધી લખાવીને અડ લીટી દોરી; તો તે લીટી ત્રિકોણની
સરખી બાજુઓ કરતાં મ્હોટી થશે.

(૩) કોઈપણ ત્રિકોણની બે બાજુઓ અસમાન હોય તો તે
બાજુઓ વચ્ચેના ઘિરોખિંડુથી સામી બાજુના કોણ પણ ખિંડુ
સૂધી દોરેલી લીટી તે બેમાંની મ્હોટી બાજુ કરતાં ન્હાની
હોવી જોઇએ.

(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એક બહારના ખિંડુથી જે
લીટીઓ દોરિયે તેમાં જે લીટી આપેલી લીટી ઉપર લંબ હોય
તે સાથી ન્હાની; અને તે લંબની એકજ તરફની બીજી
લીટીઓ લઇએ તો જે લીટી લંબની વધારે પાસે તે લીટી
વધારે દૂરની લીટી કરતાં ન્હાની; અને આપેલા ખિંડુમાંથી
બાજુબેજ લીટી લંબની દરેક બાજુએ સરખી દોરી શકાય.

સિદ્ધાંત ૨૦. પ્રમેય.

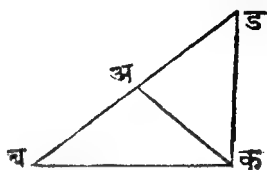
પ્રતિજ્ઞા:-એક ત્રિકોણની કોઇ પણ બે બાજુઓ
મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટો છે.

સાધન

ધારો કે અવક આપેલો ત્રિકોણ છે; તો તેની કોણપથ
એ બાજુ મળીને ત્રિજી કરતાં

મોટી થશે;

એટલે વચ, અક મળીને
કચ કરતાં મોટી,



અક, કચ મળીને અવ કરતાં મોટી,

અને કચ, વચ મળીને અક કરતાં મોટી.

રચના.

વચ લીટી લંબાવીને, બહારનો અડ ભાગ અક
ખરોખર કરો; (૧. ૩).

અને ઢક સાંધો.

સિદ્ધતા.

અડક ત્રિકોણમાં અડબાજુ અકની ખરોખર છે, (૨ચ.)

માટે અકડ ખૂણા અડક ખૂણાની ખરોખર છે. (૧.૫)

પરંતુ અકડ ખૂણા અકડ ખૂણા કરતાં મોટો છે. (પ્ર.પ્ર.૮)

માટે વકડ ખૂણા અડક એટલે વકડ ખૂણા કરતાં
પથ મોટો છે.

વળી વકડ ત્રિકોણમાં,

વકડ ખૂણા વકડ ખૂણા કરતાં મોટો હોય,

તો વડબાજુ વક કરતાં મોટી થવી જોઈએ. (૧.૧૮)

માટે, વડ લીટી એટલે વચ અને અડ મળીને વક
કરતાં મોટી;

પણ અડ લીટી તો અકની ખરોખર છે. (૨ચ.)

માટે વચ અને અક મળીને વક કરતાં મોટી છે.

એજ પ્રમાણે અક, કવ મળીને અવ કરતાં મ્હોટી, અને કવ, વઅ મળીને અક કરતાં મ્હોટી છે એમ સિદ્ધ કરી શકાય.

માટે એક ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓ ઇન્ડ્ર.સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત અ ખૂણે દુભાગવાથી સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ અ ખૂણામાંથી પાયા ઉપર લંબ દોરવાથી સિદ્ધ કરો.

(૩) કોઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રિજ બાજુ કરતાં ન્હાની છે

(૪) બે બિંદુઓ વચ્ચે ટુંકામાં ટુંકા અન્તર એક સિધી લીટી છે.

(૫) જો એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજુઓ લંબાવતાં મળી જાય તો આખા ત્રિકોણની પરિમિતિ તે ચતુષ્કોણની પરિમિતિ કરતાં વધારે હોવી જોઈએ.

(૬) એક ત્રિકોણમાં કોઈ પણ બિંદુ લઇને તેને ત્રણ ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને ત્રિકોણની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

(૭) એક ચતુષ્કોણાકૃતિની પરિમિતિ તેની બે કણાના સર્વાળા કરતાં વધારે છે.

(૮) બહુકોણાકૃતિમાં એક બિંદુ લઇને બધા ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને તે આકૃતિની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

(૯) ત્રિકોણની એક બાજુને દુભાગનારા બિંદુથી સામા ખૂણા સૂધી દોરેલી લીટીની બમણાઈ કરતાં તે ત્રિકોણનો બે બાજુનો સર્વાળો વધારે છે

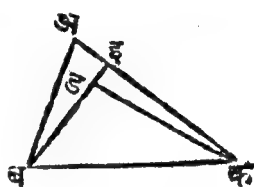
સિદ્ધાંત ૨૧ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણની એક બાજુના છેડાઓ-

માંથી તે ત્રિકોણની અંદરના એક બિંદુ સૂધી બે લીટીઓ દોરિયે, તે તે લીટીઓ ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ કરતાં ઓછી થશે, પણ તેઓની વચ્ચેના ખૂણા તે બાજુઓની વચ્ચેના ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

અગ્રક એક ત્રિકોણ છે; તેની વક બાજુના વ અને ક છેડાઓમાંથી તે ત્રિકોણની અંદરના હ બિંદુ સૂધી વડ અને કડ લીટીઓ દોરો.



તો (૧) વડ અને કડ મળીને વચ અને અક કરતાં ઓછી થશે;

(૨) વડક ખૂણો વચક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

રચના.

વડ ને લંબાવીને અક લીટીને દ બિંદુમાં છેદવા દો.

સિદ્ધતા.

(૧) વચદ ત્રિકોણમાં વચ અને અદ મળીને વદ કરતાં મોટો છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં દક ઉમેરો.

ત્યારે વચ, અને અક લીટી વદ અને દક કરતાં મોટી થઈ. (પ્ર. પ્ર. ૪)

વળી હદક ત્રિકોણમાં હદ અને દક બાજુઓ હક કરતાં મોટા છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં વડ ઉમેરો;

ત્યારે વદ અને દક લીટીઓ વડ અને હક કરતાં મોટી છે. (પ્ર. પ્ર. ૪.)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે વઅ અને અક લીટીઓ વડ અને ઇક કરતાં મોટી છે.

માટે વઅ અને અક બાજુઓ વડ અને ટક કરતાં તે વધારે મોટી થય.

(૨) વળી, ટક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણા વડક માંહેલા સામેના ટક કરતાં મોટો છે. (૧. ૧૬.)

અને વઅ ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણા ટક માંહેલા સામેના ખૂણા વઅ એટલે વઅ કરતાં મોટો છે. (૧. ૧૬)

માટે વડક ખૂણા વઅ કરતાં વધારે મોટો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાજુના ૬૦ પ્ર. સિ. પ્રતિ.

(૧) આ સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ અડ લીટી સાંધીને પાયા સુધી વધારીને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ત્રિકોણમાં એક બિંદુ લઇને તેને પ્રત્યેક ખૂણા સાથે જોડવાથી જે ત્રણ લીટીઓ થશે તેઓ બધી મળીને ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ કરતાં ઓછી થશે.

(૩) આપેલું બિંદુ ત્રિકોણની એક બાજુમાંજ લઇને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

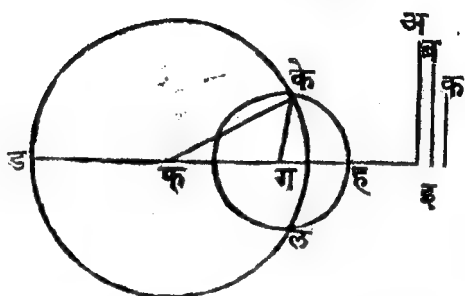
સિદ્ધાંત ૨૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક એવો ત્રિકોણ કરવો કે તેની બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી ત્રણ લીટીઓની બરોબર થાય; જે આપેલી લીટીઓ માંહેલી કોઇપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મોટી છે.

સાધન.

ધારો કે અ, વ, ક, આપેલી ત્રણ લીટીઓ છે;

જેમાંની કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મહોટી છે.
 એટલે અ અને વ મળીને ક કરતાં મહોટી,
 અ અને ક મળીને વ કરતાં મહોટી,



અને વ ને ક મળીને અ કરતાં મહોટી;
 તો એક એવો ત્રિકોણ બનાવવાનો છે કે જેની ત્રણે
 બાજુઓ અનુક્રમે અ, વ અને ક ની બરોબર હોય.
 રચના.

એક ઢાંચી સીધી લીટી દોરો; એવી કે ડ બિંદુ આગ-
 ણ સમર્યાદ એટલે હદ થયેલી હોય અને હ બિંદુ તરફ
 લંબાવી શકાય.

પછી ડફ ભાગ અ લીટી બરોબર,
 ફગ ભાગ વ લીટી બરોબર,
 અને ગહ ભાગ ક લીટી બરોબર કાપો. (૧. ૩.)
 ફ બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને અને ફડ જેટલી ત્રિજ્યા
 લઈને એક વર્તુલ દોરો. (સ્ત્રી. ૩)
 ગ મધ્યબિંદુ અને ગહ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ
 લઈને દોરો. (સ્ત્રી. ૩)

એ બે વર્તુલો કે અને લ બિંદુઓમાં છેદે છે.

ફકે અને ગકે સાંધો.

(સ્વી. ૧)

તો કેફગ માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

હલકે વર્તુલનું ક મધ્યબિંદુ છે,

માટે ફકે લીટી કડ ની બરોબર છે; (વ્યાખ્યા ૧૫)

પણ કડ લીટી તો અ લીટીની બરોબર છે;

માટે ફકે લીટી પણ અલીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧.)

વળી, હલકે વર્તુલનું ગ મધ્યબિંદુ છે,

માટે ગકે લીટી ગહ ની બરોબર છે; (વ્યા. ૧૫)

પણ ગહ લીટી ક લીટીની બરોબર છે;

માટે ગકે લીટી પણ ક લીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

અને ફગ લીટી બ લીટીની બરોબર છે; (રચના.)

માટે કેફગ એવો ત્રિકોણ થયો કે તેની ત્રણ બા-

જુઓ કેફ, ફગ અને ગકે અનુક્રમે આપેલી લી-

ટીઓ અ, બ, ક ની બરોબર છે. ક ક.

ટીપ:—સહજ વિચાર કરતાં અને બરોબર આકૃતિ કહાડતાં જણાશે કે જે શરત પ્રતિજ્ઞામાં આપી છે તે આપી ન હોત તો જે બે વર્તુલો દોરાયા તે અવશ્ય એકેકને છેદત નહિ; કદાચ એક વર્તુલ બીજાની અંદર પડત, અથવા બિલકુલ બહાર પડત. પણ આપેલી શરત પ્રમાણે તો છેદવા જોઈએજ, અને ન છેદે એ અસંભવિત છે, તે ઉપર કહેલી બે આકૃતિઓ જુદી જુદી દોરવાથી સહજ સાબિત થઈ શકશે.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલા પાયા ઉપર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે તેની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરોબર હોય.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં જે શરતો આપી છે તેનું કારણ શું?

(૩) બન્ને વર્તુલો પરસ્પર છેદવા બેઠાએ જ એવું સિદ્ધ કરો.

(૪) સિદ્ધાંતમાં જે અનુક્રમે બાજુઓ આપેલી લીટીની બરોબર છે, તેથી જુદા અનુક્રમે બરોબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરો.

(૫) આપેલી ત્રણ લીટીઓ માંહેલી ક લીટી, અ અને બ ના સર્વાળા બરોબર હોય તો આકૃતિ કેવી થશે? તેમ હોય તો ત્રિકોણ થાય કે નહિ.

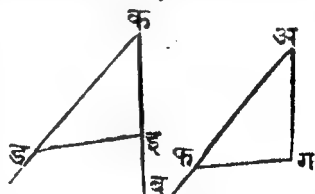
(૬) આ સિદ્ધાંત અને પહેલા સિદ્ધાંત વચ્ચે કેટલો સંબંધ છે.

સિદ્ધાંત ૨૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટીમાંના એક આપેલા બિંદુ પાસેથી એક એવો ખૂણો કરવો કે તે એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે. અવ આપેલી સીધી લીટી છે, અને અ તેમાં આપેલું બિંદુ છે; અને ડકઈ આપેલો ખૂણો છે. તો અ બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરવી છે કે તે લીટી આપેલી અવ લીટીની સાથે ડકઈ ખૂણા જેટલો એક ખૂણો કરે.



રચના.

કડ, કઈ લીટીઓમાં કોઈ પણ ઢ અને ઈ એવાં બે

ખિંદુઓ લો; અને ઢઈ લીટી દારો.

અવ લીટીમાંથી અફ ભાગ કડ જેટલો કાપો. (૧.૩)

અને અફ લીટી ઉપર એક અફગ ત્રિકોણ એવો દારો કે તેની અગ, ગફ બાજુઓ અનુક્રમે કડ, ઢઈ ની બરોબર થાય, (૧. ૨૨)

ત્યારે ફઅગ ખૂણો ઢકડ ખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

ફઅગ, ઢકડ ત્રિકોણોમાં,

{ ફઅ બાજુ ઢક ની બરોબર છે, (૨૨.)
 { અગ બાજુ કડ ની બરોબર છે, (૨૨.)
 { અને ફઅ પાંચો ઢઈ ની બરોબર છે, (૨૨.)

માટે, ફઅગ ત્રિકોણ ઢકડ ની બરોબર છે. (૧.૮)

માટે, ફઅગ ખૂણો પણ ઢકડ ખૂણાની બરોબર છે; જેટલે અવ લીટીના અ ખિંદુમાંથી અગ લીટી એવી દારી કે તે આપેલી અવ લીટીની સાથે આપેલા ખૂણા જેટલો ખૂણો કરે છે. કુ. કુ.

પ્રશ્નો.

(૧) એવું બતાવો કે ૧૧ મો સિદ્ધાંત આ સિદ્ધાંતનો એક પ્રકાર છે.

(૨) રચનામાં ૨૨ મા સિદ્ધાંતની મદદથી જે ત્રિકોણ દોર્યા છે તેની આખી આકૃતિ આપો.

(૩) બે આપેલા ખૂણાના સર્વાળા જેટલો એક ખૂણો કરો.

(૪) બે આપેલા ખૂણાની બાદબાકી જેટલો એક ખૂણો કરો.

સિદ્ધાંત ૨૪ પ્રમેય.

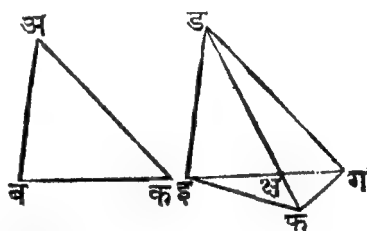
પ્રતિજ્ઞા:—જે બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ

અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરોબર હોય, પણ તે સરખી બાજુઓની વચ્ચેના એકનો ખૂણો બીજાના ખૂણા કરતાં મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણમાં મોટો ખૂણો છે તે ત્રિકોણનો પાયા(એટલે તે મોટા ખૂણા ની સામેની બાજુ) બીજા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો થશે.

માધ્યમ.

અવક, ઇડફ બે ત્રિકોણો છે, જેમાંની વચ, અક બા-

જુઓ અનુક્રમે
ઈડ, ડફ બાજુ-
ઓની બરોબર છે;
પણ વચક ખૂણો
ઈડફ ખૂણા કરતાં
મોટો છે: ત્યારે



વક પાયા ઇફ કરતાં મોટો થશે.

ડઈ અને ડફ લીટીઓમાં, ડઈ લીટી ડફ કરતાં મોટાટી નથી એમ ધારો. (જે વિશે ટીપ જુઓ)

રચના.

ડઈ લીટીમાં ડ બિંદુ આગળ ડફ જે દિશાએ પડે છે તે તરફ ઇડગ ખૂણો વચક ખૂણા બરોબર કરો. (૧. ૨૩)
હગ ભાગ ડફ અથવા અક બરોબર કરો. (૧. ૩)
ઈગ, ગફ સાંધો.

સિદ્ધતા.

વચક અને ઇડગ ત્રિકોણોમાં,

- { વચ લીટી ઇડ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
- { અને અક લીટી હગ ની બરોબર છે, (રચ.)
- { અને અતર્ખૂણો વચક અન્તર્ખૂણા ઇડગની બરોબર છે. (રચ.)

માટે, અવક ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે ડગ ત્રિકોણની
બરોબર છે. (૧. ૪)

અને, તેથી વક પાચો ઇગ પાયાની બરોબર છે.
વળી ફઢગ ત્રિકોણમાં,

ડગ લીટી ડફ ની બરોબર છે.

માટે ડફગ ખૂણા ડગફ ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ ડગફ ખૂણા તો ઇગફ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે ડફગ ખૂણા પણ ઇગફ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે ઇફગ ખૂણા તો ઇગફ ખૂણા કરતાં ઘણો
મ્હોટો થયો.

માટે ઇગ બાજુ ઇફ બાજુ કરતાં મ્હોટો થય (૧. ૧૯)

પણ ઇગ તો વક ની બરોબર સાબિત કીધી છે;

માટે વક પાચો ઇફ પાચા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો એ ત્રિકોણમાં એકની બે બાજુઓ મંબ્ર. સિ.

ટીપ:—(૧) ઉપલી સિદ્ધતામાં એવી શરત કીધી છે કે ડઈ

લીટી ડફ કરતાં મ્હોટી નથી; એ શરત અગત્યની છે, અને

જો એ શરત પહેલાંથી કીધી ન હોય તો રચનામાં ત્રણ જૂદી

જૂદી આકૃતિઓ થઈ શકે; કારણ કે ફ બિંદુ ઇગ લીટી ઉપ-

રજ પડે, અથવા તે લીટીની ઉપરની બાજુએ પડે, અથવા

તેની નીચેની બાજુએ પડે. આ આકૃતિમાં ફ બિંદુ ઇગ,

લીટીની નીચેજ પડે છે તેનું કારણ ઉપલી શરત છે. ત્યારે હવે

એ સિદ્ધ કરવાનું રહ્યું કે જો ડઈ લીટી ડફ કરતાં મ્હોટી ન

હોય તો ફ બિંદુ ઇગ લીટીની નીચેજ પડશે.

કારણ કે ધારો કે ઇગ, ડફ લીટીઓ ફ બિંદુમાં છેદે છે;

હવે ડઈ લીટી ડફ કરતાં મ્હોટી નથી,

માટે ડઈ લીટી ડગ કરતાં પણ મ્હોટી નથી;

માટે ડગફ ખૂણા ડઈગ ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો નથી. (૧. ૧૮)

પણ, બહારનો ખૂણો ડક્કા માંહેલા ખૂણા ડફ કરતાં મ્હોટો છે; (૧. ૧૬)

માટે ડક્કા ખૂણો ડગલ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે ડગ લીટી ડક્કા કરતાં મ્હોટી છે.

માટે ફડ લીટી પણ ડક્કા કરતાં મ્હોટી છે.

એટલે ફ બિંદુ ડગ લીટીની નીચે પણ જોઈએ.

ટીપ:—(૨)ને ડફ લીટી ડફ કરતાં મ્હોટી હોય તો એમ નહિ ધારવું કે આ સિદ્ધાંત થઈ શકે નહિ; કારણ કે જો તેમ હોય તો માત્ર આકૃતિરચનામાં ફેર થશે. તે એ કે ડ બિંદુ આગળ વચક ખૂણાની બરોબર જે ખૂણો કરીશું તે જે દિશાએ ડફ લીટી પડે છે તે દિશાએ ન કરતાં જે દિશાએ ડફ પડે છે તે દિશાએ ડફ લીટી ઉપર કરીશું.

પ્રશ્નો.

(૧) જો ફ બિંદુ ડગ લીટીની નીચે પડે તો બતાવો કે ડફ લીટી ડફ લીટી કરતાં મ્હોટી હોય નહિ.

(૨) “ડફ લીટી ડફ કરતાં મ્હોટી નથી” એ શબ્દોનો અર્થ શો ?

(૩) જો ઉપલી શરત ન લખી હોય તો જે ત્રણ પ્રકારો થાય તે જૂઠા જૂઠા સિદ્ધ કરો.

(૪) સ્થાનોપરીની રીતે ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

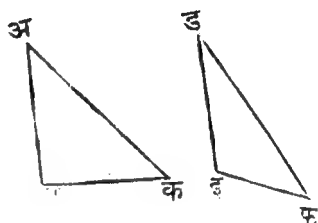
સિદ્ધાંત ૨૫. પ્રમેય

પ્રતિજ્ઞા:—જો એ ત્રિકોણમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓનો બરોબર હોય, પણ એકનો પાયા બીજાના પાયા કરતાં મ્હોટો હોય, તો મ્હોટા પાયાવાળા ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ વચ્ચેનો

અન્તર્ખૂણા બીજા ત્રિકોણના અન્તર્ખૂણા કરતાં મહોટો થશે.

સાધન.

અવકઅનેડફ બે એવા ત્રિકોણ છે કેએકની અવ અને અક બાબૂઓ અનુક્રમે બીજાની ડફઅનેડફ બાબૂઓની બરોબર છે; પણ વક પાયોફ પાયા કરતાં મહોટો છે,



તો વઅક ખૂણા ડફ ખૂણા કરતાં મહોટો થશે.

મિદ્ધતા.

કેમકે, જો વઅક ખૂણા ડફ ખૂણા કરતાં મહોટો ન હોય તો તે ડફ ની બરોબર હોવો જોઈએ અથવા તેથી નહોતો હોવો જોઈએ.

પણ વઅક ખૂણા ડફ ની બરોબર તો નથીજ; કારણ કે, તેમ હોય તો વક પાયોફની બરોબર થાય. (૧. ૪.)

પણ તેમ નથી. (પ્રતિ.)

વળી, વઅક ખૂણા ડફ ખૂણા કરતાં નહોતો પણ નથી;

કેમકે તેમ હોય તો વક પાયોફ કરતાં નહોતો થાય. (૧. ૨૪.)

પણ તેમ નથી. (પ્રતિ.)

માટે વઅક ખૂણા ડફની બરોબર નથી. અને તેથી નહોતો પણ નથી.

એટલે, વચક ખૂણા ફડફ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે. માટે જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ટીપ:-આ સિદ્ધાંત ૨૪ માનો વ્યત્યાસ છે; અને એની સિદ્ધતા પણ ઉલટીજ છે; જેવો સંબંધ સિ. ૫ અને ૬ ને છે, તેવો સિ. ૨૪ અને ૨૫ ને છે. ૬ કુ સિદ્ધાંતની સમજણ જુઓ.

ટીપ:-જે પ્રમાણે અરાધમા અને ઓગણીસમા સિદ્ધાંતો પાંચમા અને છઠ્ઠાને મળતા છે, તેજ પ્રમાણે ચોવીસમા તથા પચીસમા, ચોથા અને આઠમાને મળતા છે. એકજ પ્રતિજ્ઞામાં ચોથા અને ચોવીસમા સિદ્ધાંતો નીચે પ્રમાણે લખાય.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓની અનુક્રમે બરાબર હોય, તો જે પ્રમાણે એક ત્રિકોણની બાકીની બાજુની સામેનો ખૂણો, બીજા ત્રિકોણની બાકીની બાજુની સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો, નહાનો અથવા તેની બરાબર હોય, તે પ્રમાણે એકની બાકીની બાજુ, બીજાની બાકીની બાજુ કરતાં મ્હોટી, નહાની અથવા તેની બરાબર થશે.

પ્રશ્ન

અવક ત્રિકોણનું અ શિરોબિંદુ, વક પાયાના ક્ષ મધ્યબિંદુ સાથે સાંધ્યું; તો અવ લીટી અક કરતાં મ્હોટી અથવા નહાની હોય તે પ્રમાણે અક્ષવ ખૂણો પહોળો અથવા સાંકડો ખૂણો થશે.

સિદ્ધાંત ૨૬. પ્રમેય.

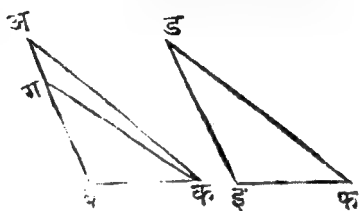
પ્રતિજ્ઞા:-જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓનો બરાબર હોય, અને (૧) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી બાજુ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી હોય, અથવા (૨) ગમે તે સરખા ખૂણાઓની સામેની અકેક બાજુ સરખી હોય તો બાકીની બાજુઓ અનુક્રમે એક બીજાની બરા-

બર થશે અને બાકી રહેલા ખૂણાઓ પણ બરોબર થશે.

સાધન.

પહેલો ભાગ:—

ધારો કે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આપેલી બાબત બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી છે.



ધારો કે, અવક, ડફ બે એવા ત્રિકોણ છે, કે અવક ખૂણા ડફની બરોબર છે, અને અકબ ખૂણા ડફની બરોબર છે; અને વક બાબત ફની બરોબર છે.

તો અવક અને ડફ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે એકેકની બરોબર થશે.

એટલે, અવ બાબત ડફની બરોબર થશે, અને અક બાબત ડફની બરોબર થશે; અને વઅક ખૂણા ડફ ખૂણાની બરોબર થશે.

કેમકે જો અવ બાબત ડફ ની બરોબર ન હોય, તો તેમાંની એક બીજી કરતાં મોટી હોવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અવ બાબત ડફ કરતાં મોટી છે,

રચના.

વઅ લીટીમાંથી વગ ભાગ ડફ બરોબર કાપો. (૧.૩) અને ગક લીટી દારો. (સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

ગવક, ડફ ત્રિકોણોમાં,

{ ગવ બાળુ ઢઈની બરોબર છે. (રચ.)
 { અને વક, ઇફની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
 { અને અન્તર્બૂણા ગવક, ઢઈફ અન્તર્બૂણાની બ-
 (રોબર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણા સર્વ પ્રકારે બરોબર છે. (૧.૪)

માટે ગવક બૂણા ડફઈ બૂણાની બરોબર છે.

પણ અકવ બૂણા ડફઈ બૂણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે ગવક બૂણા અકવ બૂણાની પણ બરોબર છે;
 (પ્ર. પ્ર. ૧.)

એક ભાગ તેના આખાની બરોબર;

એ અસંભવિત છે. (પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે અવ બાળુ ઢઈ કરતાં મ્હોટો નથી.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઇ શકે કે ઢઈ બાળુ અવ કરતાં
 મ્હોટી નથી.

એટલે અવ બાળુ ઢઈ ની બરોબર છે

માટે અવક અને ઢઈફ ત્રિકોણામાં,

{ અવ બાળુ ઢઈની બરોબર છે, (સાખીત કીધું.)
 { અને વક બાળુ ઇફની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
 { અને અન્તર્બૂણા અવક, ઢઈફ બરોબર છે.

માટે એ બે ત્રિકોણા સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧.૪)

એટલે અક બાળુ ડફની બરોબર છે,

અને વઅક બૂણા ડફ બૂણાની બરોબર છે

બીજો ભાગ:-ધારોકે ત્રિકોણામાં કોઇ પણ બે સરખા
 બૂણાની સામેના એકેક બાળુ સરખી આપી છે.

ધારોકે અવક બૂણા ઢઈફ બૂણાની બરોબર છે, અને
 અકવ, ડફઈની બરોબર છે, અને અવ બાળુ ઢઈ બાળુની
 બરોબર છે,

તો અવકઅને ડફ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.
એટલે વકબાજૂ ફની બરોબર, અને અક, ડફની
બરોબર થશે.

અને વઅક ખૂણા ડફ ખૂણાની બરોબર થશે.

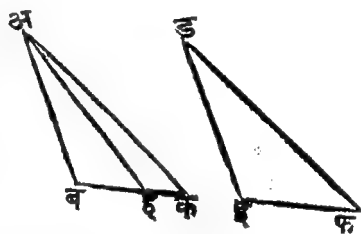
જો વકબાજૂ ફ બરોબર ન હોય, તો એમાંની એક
બીજી કરતાં મોટી હોવી જાઈએ.

જો એમ બની શકે તો, ધારો કે વક બાજૂ ફ
કરતાં મોટી છે.

રચના

વક માંથી વહ લાગ
ફનેટલો કાપો, (૧.૩.)

અને અહ લીટી દોરો.
તો, અવહ, ડફ ત્રિ
કોણોમાં,



{ અવ બાજૂ ડફની બરોબર છે,
{ અને વહ, ફની બરોબર છે,
{ અને અન્તર્ખૂણા અવહ, ડફ સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪.)

માટે અહબ ખૂણા ડફ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ ડફ ખૂણા તો અકબ ખૂણાની બરોબર છે.

(પ્રતિ.)

માટે અહબ ખૂણા અકબ ખૂણાની બરોબર છે. (પ. ૧)

એટલે અકહ ત્રિકોણનો એક બહારનો ખૂણો તે
ત્રિકોણના અંદરના સામેના ખૂણાના બરોબર છે,
એ અશક્ય છે.

(૧. ૧૬)

માટે વક બાજૂ ફ કરતાં મોટી નથી;

તેમજ ઇફ, વક કરતાં મહોટી નથી એમ સાબિત થઈ શકે;

માટે એ બે બાબતો સરખી છે.

ત્યારે અવક, ટફ ત્રિકોણમાં,

{ અવ બાબત ટફ ની બરોબર છે,
અને વક, ઇફ ની બરોબર છે,
અને અવક, ટફ અન્તર્બૂણ સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧.૪)

માટે અવ બાબત ટફ ની બરોબર છે,

અને વક બાબત ટફ બાબતની બરોબર છે.

માટે બે એક ત્રિકોણના બે બૂણાઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ટીપ (૧):—બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર એટલે ત્રણ બાબતો પણ અનુક્રમે સરખી અને ત્રણ બૂણાઓ પણ અનુક્રમે સરખા ક્યારે હોય તે બેવું બોધ્યું:—

(૧) સિદ્ધાંત ૪ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણની બે બાબતો અને અન્તર્બૂણ સરખા હોય તો,

(૨) સિદ્ધાંત ૮ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણની ત્રણ બાબતો અનુક્રમે સરખી હોય તો,

(૩) સિદ્ધાંત ૨૬ પ્રમાણે; એટલે બંને બૂણા સરખા હોય અને

(ક) તે સરખા બૂણાઓની વચ્ચે આવેલી બાબતો સરખી હોય,

અથવા (ખ) બે સરખા બૂણાની સામેની બે બાબતો સરખી હોય તો.

એટલે ઘણુંકરીને ૭ પરિમિતો (ત્રણ બાબતો અને ત્રણ બૂણા) માંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય તો બીજાં ત્રણ સરખાં થશે.

પણ નીચે લખેલા બે પ્રકારો એવા છે કે તેમાં ત્રણ પરિ-
મિતો સરખાં આપેલાં છતાં બીજાં ત્રણ અવશ્ય સરખાંજ
હોવાં જોઈએ એમ નથી.

(૧) જો એક ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના
ત્રણ ખૂણાઓની બરાબર હોય.

(૨) જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની
બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને અન્તર્ખૂણા નહિ, પણ
કોઈ બીજા બે ખૂણા બરાબર હોય.

આ છ પરિમિતોમાંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય, ને તે
ઉપરથી બાકીનાં ત્રણ સરખાં સિદ્ધ કરનાં હોય તો ઉપર
ખતાવ્યા પ્રમાણે છ પ્રકાર થાય; તેમાંના ચાર ખરા છે. (સિ-
દ્ધાંત ૪-૮-૨૬ ના બે ભાગ); અને બે અવશ્ય ખરા નથી;
એટલે તે બે પ્રકારોમાં બાકીનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં થાય
કિંવા નહીં થાય; અને તે બે પ્રકારો ઉપર લખ્યા તે છે.

સર્વ પ્રકારે સરખા ત્રિકોણો હોય ત્યારે તે ત્રિકોણો સ્થાનો-
પરી થઈ શકે; માટે તેઓનું ક્ષેત્રફળ પણ સરખુંજ થાય.

ટીપ (૨):-ઉપર જે બે પ્રકારો બાદ કીધા છે તેમાંના
બીજાને માટે એક નવી શર્ત વધારિયે તો ત્રિકોણો સરખા
થશે.

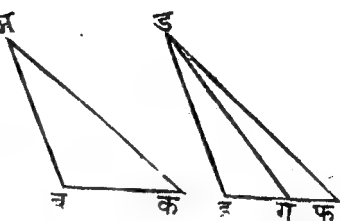
તે શર્ત શી છે તે નીચેના સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાથી જણાશે.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે
બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને બરાબર
બાજુઓની એક જોડની સામેના ખૂણાના બરાબર
હોય, તો બીજા બરાબર બાજુની સામેના ખૂણાઓ
બરાબર અથવા ન્યૂનતાપૂરક થશે.

ધારો કે અવ=ઢઈ અ
અને અક=ઢફ,
અને <અવક=<

ઢઈફ;

તો <ક અને <ફ
ન્યૂનતાપૂરક થશે.



હવે જો <અ=<ડ હોય, તો તો <ક=<ફ થશે.

અને ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

પણ જો <અ, <ડની બરાબર ન હોય તો ધારો કે ઢ
મોટો છે;

તેમાંથી ઇડગ ભાગ <અ બરાબર કરો (૧.૨૩.)

તો <અ=ઈડગ (રચ.) અને <વ=ઈ (પ્રતિ.)

અને અવ=ઢઈ (પ્રતિ.)

માટે (૧. ૨૬) અવક ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે ઢઈગ ત્રિકોણની
બરાબર છે.

∴ <ક=ઢગઈ, અને અક=ઢગ;

પણ અક=ઢફ (પ્રતિ): ∴ ઢગ=ઢફ: ∴ <ઢગફ=<ફ.

પણ ગ આગળના બે ખૂણા એકેકના ન્યૂનતાપૂરક છે.

(૧.૧૩)

અને તેમાંનો એક=<ક, અને બીજો=<ફ

∴ <ક અને <ફ ન્યૂનતાપૂરક છે.

પ્ર. સિ.

ટીપ ૩ :- માટે જો બંને બાજુઓ અનુક્રમે સરખા હોય
અને એક જોડની સામેના ખૂણા સરખા હોય તો,

(૧) બાકીની સરખા બાજુની સામેના ખૂણાઓમાંનો
એક કાટખૂણ હોય અથવા

(૨) તે બાજુઓની સામેના ખૂણા બન્ને સાંકડા હોય
અથવા

(૩) તે બાળુઓની સામેના ખૂણા બન્ને પહોળા હોય તો બન્ને ત્રિકોણો સરખાજ થશે. કારણ, જો એક કાટખૂણુ હોય તો તેના સરખો તેમજ તેનો ન્યૂનતાપૂરક પણ કાટખૂણુજ; માટે તે રહેલા ખૂણા સરખાજ થયા; માટે ત્રિકોણો પણ સરખાજ.

જો બન્ને પહોળા અથવા સાંકડા હોય તો તે એકેકના ન્યૂનતાપૂરક તો થઈ શકે નહિ; માટે તે સરખાજ હોવા જોઈએ; એટલે ત્રિકોણો પણ સરખાજ થયા.

પ્રશ્ન.

(૧) જે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા ઝારે ઝારે હોય ?

(૨) જો જે ત્રિકોણોમાં બંને બાળુઓ બરાબર હોય, અને એક જોડની સામેના ખૂણા બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો બરાબર ઝારે થાય, અને ઝારે ન થાય ?

(૩) જે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરાબર હોય તો તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરાબર હોય કે નહિ ? જો જે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ સરખું હોય તો તે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરાબર છે કે નહિ ?

(૪) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે ? અને મળતો પુરાવો આગળ કયા સિદ્ધાંતોમાં આવી ગયો છે ?

પહેલા ૨૬ સિદ્ધાંતો ઉપરથી થતા પ્રશ્નો.

૧. પાંચમા સિદ્ધાંતમાં ધારો કે ફકઃ અને બગઃ લીટીઓ હ બિંદુમાં છેદે છે; તો ફહ=ગહ.

૨. અબ, પાયાની એકજ દિશાએ અબક, અબડ ત્રિકોણો છે; અને અક=બડ છે, અને અડ=બક છે; જો અડ, બક લીટીઓ ૬ બિંદુમાં છેદે તો અડબ ત્રિકોણ સમદ્વિબાળુ થશે.

૩. જો જે કાટખૂણુ ત્રિકોણોમાં એકનો કર્ણ તથા એક

બાજુ અનુક્રમે ખીજના કર્ણ તથા એક બાજુની બરોબર હોય તો ત્રિકોણો સરખાજ થશે. (ઉલટા પુરાવો.)

૪. એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની બે બાજુઓ અને અન્તર્ખૂણો આપેલી બે લીટી અને એક ખૂણાની અનુક્રમે બરોબર હોય.

૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના છેડાના બિંદુઓમાંથી સામી બાજુ ઉપર લંબ દોરિયે તો તે સરખા થશે.

૬. એક ખૂણાને દુભાગનારી લીટીનું કોઈ પણ બિંદુ તે ખૂણાની બાજુઓથી સમાન્તર છે.

૭. એક લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી તેને છેદે એવી બીજી લીટી દોરી; અને પહેલી લીટીના છેડાના બે બિંદુઓમાંથી તે બીજી લીટી ઉપર લંબ દોરીશું તો તે સરખા થશે.

૮. એક લીટીની એકજ દિશાએ બે બિંદુઓ આપેલાં છે, તેમાંથી બે લીટીઓ એવી દોરો કે આપેલી લીટીને એકજ બિંદુમાં મળે અને તેની સાથે સરખા ખૂણા કરે.

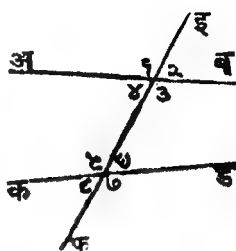
૯. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે બે એકેકને છેદતી લીટીઓથી સમાન્તરે હોય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે ?

૧૦. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તેના ઉપર બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી લંબ દોરિયે તે સરખા થાય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે ?

આવતા સિદ્ધાંતોની સમજણ.

હવે પછી સિદ્ધાંતો મુખ્ય કરીને સમાન્તર લીટીઓને લગતા તથા સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણને લગતા આવશે. એ બન્નેની વ્યાખ્યાઓ તો વ્યાખ્યા ૩૫-૩૬ માં આવી ગઈ છે,

જ્યારે એક લીટી, જેવી કે ઈફ બે સીધી લીટીઓ, જેવી કે અબ અને કહ, ની ઉપર પડે છે, ત્યારે આકૃતિમાં બતાવ્યા છે તે પ્રમાણે આઠ ખૂણાઓ થઈ શકે. એ ખૂણાઓનાં જૂદાં જૂદાં નામે આપવામાં આવ્યાં છે તે યાદ રાખવાં.



૧, ૨, ૭, ૮ ખૂણા બહારના ખૂણા કહેવાય. છે.
૩, ૪, ૫, ૬ ખૂણા માંહેના ખૂણા કહેવાય છે.
૪ અને ૬ ખૂણા એકેકના વ્યુત્ક્રમખૂણા કહેવાય છે,
તેમજ ૩ અને ૫ ખૂણા પણ એકેકના વ્યુત્ક્રમખૂણા.
૨ અને ૬ સરખાવિયે તો ૨ ને બહારનો અને ૬ ને તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સામેનો ખૂણો કહે છે.
તેજ સંબંધ ૧ અને ૫ તથા ૪ અને ૮ તથા ૩ અને ૭ વચ્ચે છે.
એટલે ૧ બહારનો ખૂણો અને ૫ તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સામેનો ખૂણો; ઇલા.

સમાન્તર લીટીઓને લગતા સિદ્ધાંતોનો મુખ્ય આધાર ૧૨ મા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપર રહેલો છે, તેટીકા સહીત બરોબર સમજવું.

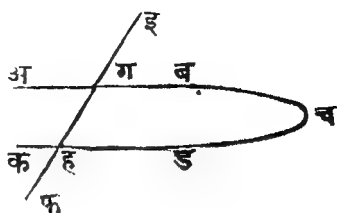
ઉપલી આકૃતિમાં ૩ અને ૬ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા લાગે છે; અને તેથી બ અને ૬ છેડા લંબાવીશું તો બન્ને લીટીઓ મળશે; તેથી ઉલટું ૪ અને ૫ ખૂણા બે કાટખૂણા કરતાં વધારે છે, માટે અ અને ક એકેકથી દૂર દૂર જતા થશે.

સિદ્ધાંત ૨૭ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ બરોબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે ઇફ સીધી
લીટી અવ અને કડ
સીધા લીટીઓને ગ
અને હ બિંદુઓમાં
એવી રીતે છેદે છે કે બ્યુ-
લકમ ખૂણાઓ અગર
અને ગરહ એકેકની બરોબર છે,



તો અવ અને કડ સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

જો અવ અને કડ સમાન્તર ન હોય, તો એ લીટીઓ
લંબાવતાં વ અને ડ તરફ, અથવા અ અને ક તરફ
મળવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે એ લીટીઓ વ અને
ડ તરફ લંબાવતાં વ બિંદુમાં મળે છે.

ત્યારે ચગર એક ત્રિકોણ થયો, જેની બે બાજુઓ ચગ
અને વહ છે, અને જેનો પાયો ગર છે.

હવે ચગ બાજુ અ બિંદુ સુધી લંબાવી છે; માટે
બહારનો ખૂણો અગર માંહેના સામેના ખૂણા ગરવ
કરતાં મોટો છે. (૧.૧૬)

પણ એ બે ખૂણા તો સરખા આપેલા છે, (પ્રતિ.)
એટલે, એ બે ખૂણા નહોતા મોટા પણ છે અને વળી
સરખા પણ છે. એ અસંભવિત છે.

માટે અવ અને કડ લીટીઓ વ અને ડ તરફ લંબા-
વતાં મળી શકશે નહિ.

એમજ એમ પણ સિદ્ધ થઈ શકે, કે અ અને ક
તરફ પણ લંબાવતાં મળશે નહિ.

માટે એ બે લીટીઓ સમાન્તર છે.

માટે જો એક સીધી લીટી ઇં

પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) અ અને ક તરફથી લીટીઓ મળે એ અસંભવિત છે એવું બતાવો.

(૨) જો જૂદી જૂદી બાજુ ઉપરના બહારના બે ખૂણાઓ સરખા હોય તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

(૩) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવી જાતનો છે? અને કયા કયા સિદ્ધાંતોમાં એવો પુરાવો આવી ગયો છે?

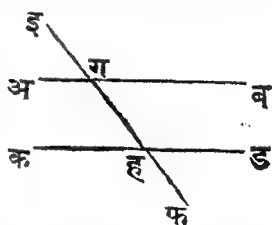
સિદ્ધાંત ૨૮ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને (૧) બહારનો એક ખૂણો તે લાટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની બરાબર કરે; અથવા (૨) તે લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે ઇફ સીધી લીટી, અબ અને કડ સીધી લીટીઓને ગ અને હ બિંદુઓ-માં છેડે છે; અને

(૧) બહારનો ખૂણો ઇગબ તેજ બાજુ ઉપરના માંહેના સામેના ખૂણા ગહડ ની બરાબર છે;



તો અબ અને કડ સમાન્તર થશે.

અથવા (૨) ઇફ લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખૂણા ગહડ અને ગહડ મળીને બે કાટખૂણા બરાબર છે, તો અબ અને કડ સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

ઇગબ ખૂણો ગહડ ખૂણાની બરાબર છે, (પ્રતિ.)

પણ ઇગલ ખૂણા સામસામેના ખૂણા અગલ ની બરોબર છે.

માટે અગલ ખૂણા ગલ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

પણ એ તો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે;

માટે અલ અને કલ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧૨૭)

(૨) લગલ અને ગલ ખૂણાઓ મળીને બે કાટ-ખૂણા બરાબર છે

પણ પાસપાસેના ખૂણાઓ લગલ અને અગલ મળીને પણ બે કાટખૂણાની બરાબર છે. (૧. ૧૩.)

માટે લગલ અને અગલ ખૂણા લગલ અને ગલ ખૂણાની બરાબર થયા.

તેમાંથી સાધારણ ખૂણા લગલ કહાડી લેા.

તો બાકીના ખૂણા અગલ તે બાકીના ખૂણા ગલ ની બરાબર થયા.

પણ એ તો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે.

માટે અલ અને કલ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧. ૨૭.)

માટે જો એક સીધી લીટી ઈં

પ્ર. સિ.

ટીકા:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું દેખાય છે, કે જો લગલ લીટીથી લગલ ખૂણા ગલ ખૂણાના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાની બરાબર થાય, તો લગલ લીટી ગલને સમાન્તર થશે. બારમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણમાં એવું ધારેલું છે, કે એક લીટીથી ગલની સાથે ગલની ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાના કરતાં નહાનો ખૂણા થાય, તો તે લીટી ગલને સમાન્તર થશે નહિ; અને તેથી જો લંબાવી તો તેને મળશે. માટે ખરેખર પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ તો એજ કે, બે સીધી લીટીઓ જો એ અસ્પર્શને છેદે છે તેઓ બન્ને એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર થઈ શકતી નથી.

બારમું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ ૨૯ મા સિદ્ધાંતને માટે અગત્યનું છે;

પણ એ પ્ર. પ્ર. ખરેખર્ પ્રત્યક્ષ નથી માટે એ સિદ્ધાંત એ પ્રમાણના આધાર વગર સિદ્ધ કરવાને ઘણાએક પ્રયત્નો થયાં છે; પણ તેમાં કોઈ પણ એવું નથી કે એ પ્ર. પ્ર. વાપરવાને જે હરકત લાગે છે તેથી ઓછી હરકત તેને લાગે.

પ્રશ્ન.

(૧) કહફ અને અગહ ખૂણા ખરોખર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે,

(૨) અગહ અને ગહક મળી બે કાટખૂણા ખરોખર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

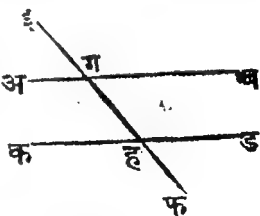
(૩) જે લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને લંબ છે તે એકેકને સમાન્તર છે.

સિદ્ધાંત ૨૯ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-જો એક સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ ઉપર પડે તો તે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક બીજાની ખરોખર કરશે; અને બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની ખરોખર કરશે; અને તે લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા ખરોખર કરશે.

સાધન

ધારો કે ઈફ સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ અબ અને કહ ઉપર પડે છે.



તો (૧) વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ

અગહ, ગહક એક બીજાની ખરોખર થશે.

(૨) બહારનો ખૂણો ઈગબ માંહેના એકજ તરફના સામેના ખૂણા ગહકની ખરોખર થશે;

(૩) એકજ તરફના બે માંહેના ખૂણાઓ વગહ, ગહડ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો અગહ ખૂણા ગહડ ખૂણાની બરોબર નહોત્ય, તો એ બેમાંના એક બીજા કરતાં મોટો હોવો જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અગહ ખૂણા ગહડ કરતાં મોટો છે.

એ દરેકમાં વગહ ખૂણા ઉમેરો;

ત્યારે અગહ અને વગહ ખૂણા મળીને વગહ અને ગહડ ખૂણા કરતાં મોટો થયા.

પણ પાસ પાસેના ખૂણા અગહ અને વગહ તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે;

માટે, વગહ અને ગહડ ખૂણા તો બે મળીને બે કાટખૂણા કરતાં નહોતા થયા;

માટે અવ અને કડ લીટીઓ વ અને હ તરફ લંબાવતાં મળવી જોઈએ; (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

પણ એ લીટીઓ તો મળેજ નહિ; કેમકે તેઓ સમાન્તર છે.

માટે અગહ ખૂણા ગહડ કરતાં મોટો નથી; તેમજ ગહડ ખૂણા અગહ કરતાં મોટો નથી એ સિદ્ધ થશે,

એટલે વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) અગહ ખૂણા સામસામેના ખૂણા ફગવની બરોબર છે; (૧. ૧૫)

પણ અગર ખૂણા તો ગરહ ખૂણાની બરોબર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

માટે બહારનો ખૂણા રૂગવ માંહેના સામેના ખૂણા
ગરહ ની બરોબર થયો.

(૩) રૂગવ ખૂણા ગરહ ખૂણાની બરોબર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

એ દરેકમાં વગર ખૂણા ઉમેરો;

ત્યારે રૂગવ, વગર ખૂણા વગર, ગરહ ખૂણાની બરો
બર થયા; પણ પાસપાસેના ખૂણા રૂગવ, વગર તો
એ મળીને એ કાટખૂણાની બરોબર છે; (૧. ૧૩.)
માટે, માંહેના એ ખૂણા વગર, ગરહ પણ એ મળીને
એ કાટખૂણાની બરોબર છે.

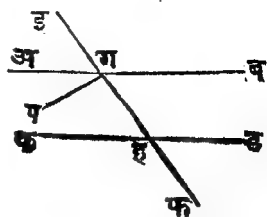
માટે, જે એક સીધી લીટી એ સમાન્તર સાધી
લીટીઓ ઉપર પડે, ઈં

પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંતનો આધાર યુક્તિહિના બારમા પ્ર. પ્ર.
ઉપર રહેલો છે; માટે સમાન્તર લીટીઓના ગુણોનો આધાર
તે ઉપર છે. પણ તે પ્ર. પ્ર. સમજવામાં સહેલું નથી; અને
વળી ખરેખર પ્રત્યક્ષ પણ નથી. માટે તે પ્ર. પ્ર. નો આધાર
ન લેતાં ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાને ત્રિસ યત્નો થયાં છે; પણ
તેમાંની કોઈપણ રીતે મુશ્કેલી બિલકુલ દૂર થતી નથી. તોપણ
સૌમાં ઓછી અડચણવાળી રીત “પ્લેકેર” ના પ્રત્યક્ષ પ્ર-
માણની છે; તે નીચે આપી છે:—

પ્ર. પ્ર. “ જે એ લીટી એકેકને છેદે તો તે બન્ને એકજ
સીધી લીટીને સમાન્તર હોઈ શકે નહિ ” આ પ્ર. પ્ર. મુશ્કેલ
નથી; એમાં જે કહ્યું છે તે ધણું કરીને પ્રત્યક્ષ છે. આ ઉપરથી
૨૯મો સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થાય છે:—

(૧) અવ અને કહ આપેલી સમાન્તર લીટીઓ છે; તો અગહ ખૂણા=ગહડ થશે. જો તેમ ન હોય તો ધારો કે અગહ મ્હોટા છે; તેમાંથી પગહ ખૂણા ગહડ બરોબર કાપો. હવે; પગહ=ગહડ; માટે પગ લીટી



કહ ને સમાન્તર છે; (૧. ૨૭) પણ અગ લીટી પણ કહ ને સમાન્તર આપેલી છે. એ ઉપલા પ્ર. પ્ર. ની વિરુદ્ધ છે. માટે અગહ ખૂણા ગહડ ખૂણા કરતાં મ્હોટા નથી; તેમજ ન્હાનો પણ નથી; એટલે સરખો છે.

(૨) અને (૩) ઉપરના સિદ્ધાંત પ્રમાણેજ સિદ્ધ થશે.

ઉપલા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપરથી કેટલાક સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો નિકળી શકે છે; તેઓની સિદ્ધતા પ્રત્યક્ષ છે; પણ તે ઉપસિદ્ધાંતો કાંઈ પુરાવામાં વપરાતા નથી; તેઓ નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) જો સમાન્તર લીટીઓ માંહેલી એક ઉપર જો એક સીધી લીટી લંબ હોય તો તેને લંબાવતાં તે બીજી લીટી ઉપર લંબ થશે.

(૨) જો સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે જો જૂદા જૂદા લંબોના ભાગો પડે છે તેઓ સરખાજ છે.

(૩) જો સમાન્તર સીધી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરી હોય તો તે જો લંબો એકજ લીટીમાં થશે; અથવા સમાન્તર થશે.

(૪) જો છેદનારી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરિયે તો તે લંબો સમાન્તર હોઈ શકે નહિ.

પ્રશ્ન.

(૧) અગહ અને કહફ ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

- (૨) વગહ અને ડહફ ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.
- (૩) ડગલ અને ડહફ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.
- (૪) ૨૯ માના ત્રણ ભાગોના વ્યત્યાસ કયા સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધ થઈ ગયા છે, તે બતાવો.

૨૭-૨૮-૨૯ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) બે લીટીઓ અડ અને કડ એક બીજીને ૩ બિંદુમાં હુલાગે છે; તો અડ લીટી વડ ને સમાન્તર થશે.

(૨) જો લીટીઓ એકજ લીટીને લંબ છે, તે લીટીઓ એકેકને સમાન્તર છે.

(૩) જો બે લીટીઓ અરસ્પરસ બીજી બે લીટીને સમાન્તર હોય તો પહેલી બે લીટીઓ વચ્ચેના ખૂણા બીજી બેની વચ્ચેના ખૂણાની બરોબર છે.

(૪) જો બે સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે બન્નેથી સરખે અન્તરે એક બિંદુ લઈને તેમાંથી બે લીટીઓ દોરિયે, તો તેથી સમાન્તર લીટીઓના જો બે ભાગ થશે તે સરખા થશે.

(૫) બે સીધી લીટીઓ એકેકને છેદે છે; તેઓ બીજી બે સીધી લીટીને અરસ્પરસ સમાન્તર છે; તો તેઓની વચ્ચેના ખૂણા બરોબર થશે.

(૬) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાને હુલાગનારી એક લીટી પાયા સુધી દોરી તો જો બિંદુમાં તે પાયાને છેદે છે તેમાંથી ત્રિકોણની બાજુઓને જો સમાન્તર લીટીઓ તેજ ત્રિકોણમાં દોરીશું, તે બરોબર થશે.

(૭) બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે કોઈ પણ સીધી લીટી દોરીને તેના મધ્યબિંદુમાંથી એક બીજી લીટી તે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે દોરીશું, તો તે પણ તે જ બિંદુમાં હુલાગાશે.

(૮) કોઈ ત્રિકોણના એક બહારના ખૂણાને દુબાગનારી લીટી એક બાજુને સમાન્તર હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ થશે.

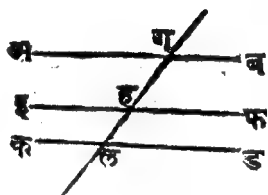
સિદ્ધાંત ૩૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-જો બે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર હોય, તો તેઓ એકેકને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે બે સીધી લીટીઓ
અબ, કડ દરેક ઈફ ને સમા-
ન્તર છે;

તો અબ, કડ ને સમાન્તર
થશે.



સિદ્ધતા.

અબ અને ઈફ સમાન્તર લીટીઓને ગહ કાપે છે,
માટે અગહ ખૂણા તેના વ્યુત્ક્રમ ખૂણા ગહફ ની
બરોબર છે. (૧. ૨૯)

અને, ઈફ અને કડ સમાન્તર લીટીઓને ગહલ છેદે છે,
માટે બહારનો ખૂણા ગહફ માંહેના ખૂણા હલડ ની
બરોબર છે. (૧. ૨૯)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે ગહફ ખૂણા તો અગહ ની
બરોબર છે.

માટે અગહ ખૂણા ગલડ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

અને એ ખૂણાઓ વ્યુત્ક્રમ છે;

માટે અબ લીટી કડ ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

માટે, જો બે સીધી લીટી ધ૦

પ્ર. સિ.

ટીપ:-૨૯ મા સિદ્ધાંતની ટીપમાં આપેલા “ પ્લેફર ” ના પ્ર. પ્ર. થી આ સિદ્ધાંત તુરત થઇ શકે છે; કેમકે જો એ બે લીટીઓ સમાન્તર ન હોય તો મળવી જોઇએ; પણ જો મળે તો દરેક **ઈફ** લીટીને સમાન્તર હોય નહિ; (પ્ર. પ્ર.) જે પ્રતિ- સાધી વિરૂદ્ધ છે.

વળી એ પણ જોવાનું છે કે આ સિદ્ધાંત એક રીતે બિલકુલ પ્રત્યક્ષ છે, કારણ કે જો અબ અને કડ લીટીઓ **ઈફ** લીટી જે તેઓની વચ્ચે આવેલી છે તેને મળી શકતીજ નથી (પ્રતિ.) તો તેઓ એકેકને પણ મળી શકેજ નહિ; એટલે સમાન્તરજ હોવી જોઇએ.

આકૃતિમાં અબ અને કડ લીટીઓને બે બાજુએ દોરીને **ઈફ**ને વચ્ચમાં દોરી છે, પણ **ઈફ** લીટી એક છેડેથી દોરીને પણ સિદ્ધાંત થઇ શકે છે.

પ્રશ્ન.

(૧) બે સમાન્તર લીટીમાંથી એકને છેદનારી લીટી બીજીને મળવીજ જોઇએ.

(૨) આકૃતિમાં આપેલી લીટીઓ જુદી રીતે ગોઠવીને એજ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી સીધી લીટીને સમાન્તર એક સીધી લીટી દોરવી.

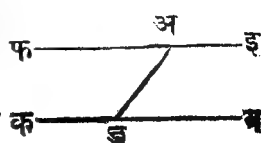
સાધન.

ધારો કે અ આપેલું બિંદુ છે.

અને બક આપેલી સીધી લીટી છે;

તો અ બિંદુમાંથી બક લીટીને

સમાન્તર એક લીટી દોરવાની છે.



રચના.

બક લીટીમાં એક બિંદુ ડ લો; અને અ, ડ બિંદુઓ સાંધો.

ડઅ લીટીમાં અ બિંદુ આગળ ડઅઈ ખૂણા અડક ખૂણાની બરોબર, અડની સામી બાજુએ બનાવો; (૧.૨૩)

અને ઇઅ ને ફ સુધી લંબાવો.

તો ઇફ લીટી કબ ને સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

અડ લીટી બે સીધી લીટીઓ ઇફ, બક ને મળે છે, અને વ્યુત્ક્રમખૂણા ઇઅડ, અડક બરોબર કરે છે. માટે ઇફ લીટી બક ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭.) અને તે અ બિંદુમાંથી દારી છે. ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) અ બિંદુ આગળ અડક ખૂણાની બરોબર ને ખૂણા બનાવ્યો છે તે અડક નીચ દિશા તરફ બનાવ્યો હોય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ થાય કે નહિ ?

(૨) આપેલા બિંદુમાંથી એકજ સમાન્તર લીટી દોરાય કે વધારે ?

(૩) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટી સાથે એક આપેલા ખૂણા બરોબર ખૂણા કરે.

(૪) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે આવેલો તેનો ભાગ એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય; આ ક્યારે અશક્ય છે ?

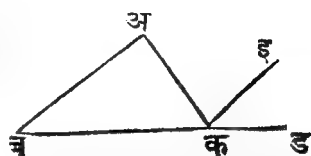
સિદ્ધાંત ૨૨ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:— જો એક ત્રિકોણની એક બાજુ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો માંહેના અને સામેના બે ખૂણા-

ઓની ઘરોઘર થશે; અને હરેક ત્રિકોણના ત્રણ માંડેના ખૂણાઓ મળી ને બે કાટખૂણા ઘરોઘર થશે.

સાધન.

ધારો કે અવક આપેલો ત્રિકોણ છે; જેની એક વક બાજુ ડ બિંદુ સુધી લંબાવી છે.



તો (૧) બહારનો ખૂણો અકડ માંડેના સામેના ખૂણાઓ કઅવ, અવક ની ઘરોઘર થશે.

અને (૨) માંડેના ત્રણ ખૂણાઓ અવક, વકઅ, કઅવ મળીને બે કાટખૂણા ઘરોઘર થશે.

રચના.

ક બિંદુમાંથી કઈ લીટી વઅ ને સમાન્તર દોરો.

(૧. ૩૧)

સિદ્ધતા.

વઅ લીટી કઈ ને સમાન્તર છે, અને તેઓને અક મળે છે.

માટે, અકઈ ખૂણો તેના વ્યુત્કમખૂણા કઅવ ની ઘરોઘર છે.

(૧. ૨૯)

વળી વઅ લીટી કઈ ને સમાન્તર છે, અને વડ તેઓને મળે છે,

માટે બહારનો ખૂણો ફકડ માંડેના સામેના ખૂણા અવક ની ઘરોઘર છે;

(૧. ૨૯)

માટે બહારનો આખો ખૂણો અકડ બે માંડેના સામેના ખૂણા કઅવ, અવક ની ઘરોઘર છે.

(૨) વળી, અકડ ખૂણા કઅવ, અવક ખૂણાની બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું.)

તે દરેકમાં વકઅ ખૂણા ઉમેરો;

તો વકઅ, અકડ ખૂણા મળીને ત્રણ ખૂણા વકઅ કઅવ, અવક ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ પાસપાસેના ખૂણા વકઅ, અકડ તો બે કાટખૂણા બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે ત્રણ ખૂણા, વકઅ, કઅવ, અવક મળીને પણ બે કાટખૂણાની બરોબર થયા.

માટે એક ત્રિકોણની ધ૦

પ્ર. સિ.

સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો—(૧)ને બે ત્રિકોણમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે ખીળના બે ખૂણાઓની બરોબર હોય તો એકનો બાકી રહેલો ત્રિજો ખૂણો ખીળના ત્રિજ ખૂણાની બરોબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણ ત્રિકોણના બે સાંકડાખૂણા એક ખીળના કાટખૂણા થશે

(૩) એક કાટખૂણ સમઘ્રિયાળૂ ત્રિકોણનો દરેક સરખો ખૂણો અર્ધ કાટખૂણ બરોબર છે.

(૪) ને એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો ખીળ બેના સર્વાળા બરોબર હોય તો તે ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઈએ.

(૫) એક ચતુષ્કોણાકૃતિના ચાર ખૂણાઓ મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર છે.

(૬) એક સમઘ્રિયાળૂ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો એક કાટખૂણાનો રૂ છે

પ્રશ્ન.

(૧) એક સાંકડાખૂણ ત્રિકોણમાં કોષપણ બે ખૂણા મળીને ત્રિજ કરતાં મોટા હોવા જોઈએ.

(૨) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવતાં જે ખૂણો થાય, તેને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે.

(૩) ઉપલા સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ ફક્ત ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજૂને સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૪) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો તે પાયાને એક છેડેથી લંબાવતાં જે ખૂણો થાય તેની બરાબર થશે.

(૫) કોઈ પણ ત્રિકોણના પાયાને બન્ને છેડેથી લંબાવ્યો તો બહારના બે ખૂણાના સર્વાળામાંથી ટોચનો ખૂણો બાદ કરતાં બે કાટખૂણા બાકી રહેશે.

(૬) એક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુથી એક લીટી સામેની બાજૂના મધ્યબિંદુ સુધી દોરી હોય, તો તેથી બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો થશે.

(૭) એક સમર્થાદ સીધી લીટીના એક છેડાથી તે લીટી લંબાવ્યા વિના, તે લીટી ઉપર એક લંબ દોરો.

(૮) એક કાટખૂણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

ઉપરનો સિદ્ધાંત ધણાજ અગત્યનો છે; અને તેના ઉપરથી નિકળતા કેટલાક ઉપસિદ્ધાંતો અને તેને લગતા કેટલાક પ્રશ્નો ઉપર આપ્યા છે. પણ એ સિદ્ધાંત ઉપરથી બે ઉપસિદ્ધાંતો ધણાજ અગત્યના નિકળે છે; અને તે ૩૨ માં સિદ્ધાંતના પહેલા અને બીજા ઉપસિદ્ધાંતને નામે પ્રખ્યાત છે. તેમનો ઉપયોગ ગણિતમાં વારંવાર થાય છે, માટે તેમની આકૃતિ, રચના, સિદ્ધતા, વગેરે નીચે અતુકમે આપ્યાં છે.

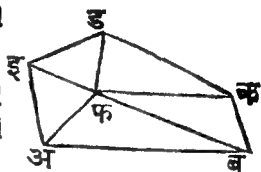
સિદ્ધાંત ૩૨ માનો ઉપસિદ્ધાંત પહેલો

કોઈ પણ સીધી લીટી આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણામાં ચાર

કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે સર્વાળો આકૃતિની જેટલી બાજુઓ હોય તેના બમણા કાટખૂણા બરોબર થાય.

ધારો કે અબકઢઈ એક સીધી લીટી આકૃતિ છે.

તેમાં એક ફ બિંદુ લીધું; અને તેને આકૃતિના દરેક બિંદુ સાથે સાંધ્યું.



તો જેટલી બાજુ આકૃતિની છે તેટલા તે આકૃતિમાં ત્રિકોણો થયા.

અને દરેક ત્રિકોણના બધા ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;

માટે એ બધા ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓનો સર્વાળો તે આકૃતિની જેટલી બાજુઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણા જેટલો થયો.

પણ એ ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓ લધયે તો તે આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણાઓ અને ફ બિંદુ આગળના બધા ખૂણા થયા.

વળી ફ બિંદુ આગળના બધા ખૂણાઓ મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૧૫. ઉપ.)

માટે આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણા અને ચાર કાટખૂણા મળીને આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણા ની બરોબર છે.

પ્ર. સિ.

સિદ્ધાંત ૩૨ માનો ઉપસિદ્ધાંત બીજો.

જો કોઈપણ સીધી લીટી આકૃતિની દરેક બાજુ અનુક્રમે એકજ દિશા તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓ સર્વ મળી ને ચાર કાટખૂણા બરોબર થશે.

દરેક શિરોબિંદુ આગળ માંહેના
ખૂણા અને બહારનો બન્ને મળીને
એ કાટ ખૂણા બરોબર છે; (૧. ૧૩)



માટે બધા માંહેના અને બધા
બહારના ખૂણા મળીને આકૃતિની જેટલી બાજુ છે તેથી બ-
મણા કાટખૂણા બરોબર છે.

પણ માંહેના ખૂણાઓ અને ચાર કાટખૂણા મળીને પણ આ-
કૃતિના બાજુના બમણા કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૩૨. ઉપ. ૧)

માટે માંહેના ખૂણાઓ તથા બહારના ખૂણાઓ મળીને માંહે-
ના ખૂણાઓ તથા ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે, (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બહારના બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરો-
બર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩)

પ્ર. સિ.

દીપ:—આ ઉપરથી કાંઈ પણ સીધી લીટી આકૃતિમાં બધા
મળીને કેટલા કાટખૂણા થાય તે તુરત જણાશે; જેમકે તે આ-
કૃતિને ૮ બાજુઓ હોય તો તેના માંહેના ખૂણા બધા મળીને
 $૧૬-૪=૧૨$ કાટખૂણા જેટલા થશે. વળી જો આપેલી આકૃતિ
એવી હોય કે તેના બધા ખૂણા સરખાજ છે તો દરેક ખૂણાના
મહત્વનો નિશ્ચય થશે. જેમકે, ૮ બાજુની આકૃતિના સર્વ ખૂણા
સરખા હોય તો દરેકખૂણા $\frac{૧૨}{૮}$ એટલે કે $\frac{૩}{૨}$ કાટખૂણા બરોબર
થવો જોઈએ.

વળી દરેક આકૃતિના ખૂણાઓનો સર્વાંગો કાટખૂણાની એકી
સંખ્યાઓની બરોબર છે; કેમકે બાજુઓની સંખ્યાની બમણાઈ
આવશ્યક એકી છે. અને તેમાંથી ચાર એકી સંખ્યા બાદ કરી-
ધી તો બાકી એકી રહેશે.

વળી માંહેના ખૂણા બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા બરો-
બર છે તે જણવાથી તે આકૃતિની બાજુઓની સંખ્યા માલમ

પડી શકેછે; કેમકે કાટખૂણાની સંખ્યામાં ચાર ઉમેરીને તેનું અર્ધ લેઈએ તો બાજુઓની સંખ્યા આવે.

સિદ્ધાંત ૩૨ ના ઉપસિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમકોણ અને સમબાજુ પદકોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું ?

(૨) એવાજ એક પદકોણની એક બાજુ લંબાવી તો બહારનો ખૂણે એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખૂણાની બરાબર થશે.

(૩) એક બહુકોણ આકૃતિની ન બાજુઓ છે; અને તે આકૃતિના બધા ખૂણા સરખા છે; તો દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું ?

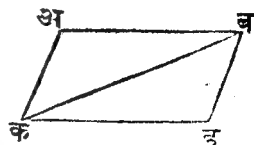
(૪) એક બહુકોણ આકૃતિની આંતરે આંતરેની બાજુઓ લંબાવિયે તો જે બિંદુઓમાં તે બાજુઓ છેદશે ત્યાંના બધા ખૂણાઓમાં આઠ કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ હોય તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-જે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓના એકજ તરફના છેડા સાંધનારી સીધી લીટીઓ પણ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે અવ અને કડબે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓ છે; અને ધારો કે તેઓને એકજ બાજુએથી અક અને વડ લીટીઓ સાંધે છે.



તો અક અને વડ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

રચના.

વક લીટી દારો.

સિદ્ધતા.

અવ અને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે, અને વક લીટી મળે છે.

માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ અવક, વકડ ખરોખર છે.
(૧. ૨૮)

હવે, અવક, ડકવ ત્રિકોણોમાં,

{ અવ લીટી કડની ખરોખર છે. (પ્રતિજ્ઞા)
અને વક લીટી ખન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે
અને અવક ખૂણા વકડની ખરોખર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે સરખા છે; (૧.૪)

એટલે, અક પાયા ડક પાયાની ખરોખર છે,

અને અકવ ખૂણા ડકવ ખૂણાની ખરોખર છે;

પણ એતો વ્યુત્ક્રમ ખૂણા છે;

માટે અક લીટી વક ને સમાન્તર છે. (૧.૨૭)

અને તેઓ સરખી છે એમ પણ બતાવ્યું.

માટે, બે સરખી અને સમાન્તર ધૃવ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના બે ભાગ છે તે જૂદા જૂદા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તેની એકજ બાજુએ બે બહાર આપેલાં બિંદુઓમાંથી સરખી લંબ દોરી, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી લીટી આપેલી લીટીને સમાન્તર થશે.

(૩) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓને દુભાગી; તો તે બે બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે, અને પાયાથી અર્ધ થશે.

(૪) આ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં “એકજ તરફના બે છેડા” એવા શબ્દો લખ્યા છે તેનું કારણ શું ?

સિદ્ધાંત ૩૪ પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણની સામ-સામેની બાજુઓ અરુપરસ બરોબર છે, તેમજ સામ-સામેના ખૂણાઓ પણ બરોબર છે; અને એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણને તેની કઈ લીટી દુભાગે છે. સાધન.

ધારોકે અકલ્બ એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ છે. અને વક તેની કઈ લીટી છે, તો એ આકૃતિની સામસામેની લીટીઓ તથા સામસામેના ખૂણા બરોબર થશે; અને વક કઈ લીટી તેને દુભાગશે.

અબ લીટી કડ ને સમાન્તર છે, અને તેઓને વક મળે છે,

માટે વ્યુત્કંભ ખૂણા અવક, કલ્બ બરોબર છે. (૧. ૨૮)

વળી, અક અને વડ સમાન્તર છે, અને તેઓને વક મળે છે,

માટે વ્યુત્કંભ ખૂણા અકલ્બ, કલ્બ બરોબર છે. (૧. ૨૮)

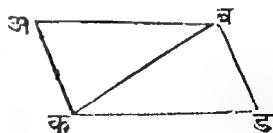
માટે, અવક, કલ્બ ત્રિકોણોમાં,

અકલ્બ ખૂણા કલ્બ ખૂણાની બરોબર છે.

અને અવક ખૂણા વકલ્બ

ખૂણાની બરોબર છે;

અને સરખા ખૂણાએ



પાસેની બાજુ વક સાધારણ છે;

માટે, અવક, કલ્બ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે;

(૧. ૨૬)

માટે અવ લીટી ડક નીખરોખર છે; અને અક, ડવની ખરોખર છે;

અને વઅક ખૂણા કડવ ખૂણાની ખરોખર છે.
વળી, અવક ખૂણા ડકવ ખૂણાની ખરોખર છે,
અને કવડ ખૂણા વકઅ ખૂણાની ખરોખર છે,
માટે આખો ખૂણા અવડ આખા ખૂણા ડકઅની ખરોખર છે.

અને એવું સિદ્ધ કીધું કે અવક, ડકવ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે ખરોખર છે.

માટે કર્ણ લીટી વક, અકડવ સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણને દ્વિભાગે છે.

માટે એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ : ૬૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાટ-ખૂણો હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૨) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ સરખી હોય તો તે સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

(૩) જો એક ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા ખરાખર હોય તો તે સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની બાજુઓ સરખી હોય તે એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૫) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે છે.

(૬) જો એક ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે તો તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવો જોઈએ.

(૭) જો એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની કર્ણો ખૂણાને દુભાગે તો તે સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોવો જોઈએ.

(૮) જો એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણની કણી સરખી હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૯) જો એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ કાટખૂણુ નહોય તો તેની કણી સરખી થાય નહિ.

(૧૦) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક કણીના મધ્ય બિંદુમાંથી બે સામસામેની બાજુઓ સુધી એક લીટી દોસી તો તે લીટી તે બિંદુમાં દુભાગાશે.

(૧૧) જો બે સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરોબર હોય, અને એકનો માંહેનો ખૂણો બીજાના માંહેના ખૂણાની બરોબર હોય, તો તે સં બાં ચતુષ્કોણો સર્વે પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૨) બે કાટખૂણુ ચતુષ્કોણોમાં જો એકની બે પાસપાસેની બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓની અનુક્રમે બરોબર હોય તો તે કાટખૂણુ ચતુષ્કોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૩) એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણમાં એક કણી ઉપર સામેના બન્ને ખૂણાઓમાંથી લંબ દોરી તો તે લંબો બરોબર થશે.



પહેલા ૩૪ સિદ્ધાંતો ઝિપર પ્રશ્નો.

(૧) એક ત્રિકોણનો પાયો બન્ને તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી થયેલો ખૂણો પાયા ઉપરના માંહેના બે ખૂણાના સર્વાળાનો અર્ધ થશે.

(૨) એક ત્રિકોણના પાયાના ખૂણા દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો શિરોબિંદુના ખૂણામાં પાયાના ખૂણાઓના અર્ધનો સર્વાળો ઉમેરિયે તેટલો થશે.

(૩) બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ બીજીની બે બાજુઓને અનુક્રમે સરખી છે અને સમાન્તર પણ છે, તો ત્રીજી બાજુઓ પણ સરખી અને સમાન્તર થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાજુઓ સમાન્તર હોય, અને બીજી બે ફક્ત સરખી હોય તો સામસામેના ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક થશે, અને કહી શકાય સરખી થશે.

(૫) ચોરસ, કાટખૂણચતુષ્કોણ, અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ સર્વ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો થવા જોઈએ.

(૬) જો એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક કાંઈ તેની એક બાજુની બરાબર હોય તો તે ચતુષ્કોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કહાડો.

(૭) બે સરખી અને સમાન્તર લીટીઓના સામસામેના (વ્યુત્ક્રમ) છેડાઓ સાંધ્યા, તો સાંધનારી લીટીઓ સમાન ક્યારે થશે, અને અસમાન ક્યારે ?

(૮) એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓમાંથી સામી બાજુઓ સુધી કોઈ પણ લીટીઓ એવી દોરી ન શકાય કે તે અરરપરસ એકબીજાને દુભાગે.

(૯) કોઈ અન્તવાન સીધી લીટીના ગમે તેટલા સરખા ભાગ કરો.

(૧૦) એક કાટખૂણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખૂણો બીજા કરતાં ત્રણ ગણો છે, તો ન્હાના ખૂણને ત્રિભાગો.

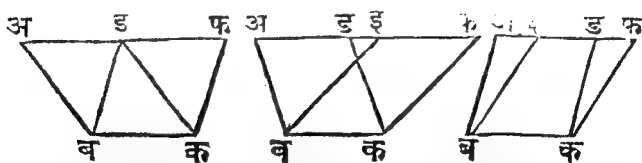
(૧૧) એક સમઘ્રિયાળૂ ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી એક લીટી સામી બાજુ સુધી, તથા બીજી બે લીટી પાયાના કોઈપણ બિંદુમાંથી સામી બાજુઓ સુધી, એવી દોરી છે કે તેઓ પાયા સાથે સરખા ખૂણા કરે, તો પાછલી બે લીટી મળીને પહેલીની બરાબર થશે.

(૧૨) બે આપેલી લીટીઓની વચ્ચે એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટીની બરાબર હોય અને બીજી બે આપેલી લીટીને સમાન્તર હોય.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે તે સં બાં ચતુષ્કોણને દુભાગે.

સિદ્ધાંત ૩૫. પ્રમેય

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપરના તથા એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ બરાબર છે.



ધારો કે અબકડ અને ડ્વક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા બક ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વક, અફ ની વચ્ચે છે;

તો એક સં બાં ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના ક્ષેત્રફળની બરાબર છે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો આપેલા સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણની પાયાની સામેની બે બાજુઓ એકજ બિંદુમાં આવી મળતી હોય, તો દરેક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ, વડક ત્રિકોણનો બનશે છે; (૧. ૩૪)

માટે તેઓ એકેકની બરોબર છે, (પ્ર. પ્ર. ૬)

(૨) પણ જો વક્ર પાયાની સામેની અડ અને ફ બાજુઓ એકજ બિંદુમાં મળી જતી ન હોય, તો અવકટ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે,

માટે અડ બાજુ વક્રની બરોબર છે; (૧. ૩૪)

અને તેજ કારણથી ફ લીટી વક્રની બરોબર છે;

માટે અડ લીટી ફ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બીજી આકૃતિ પ્રમાણે) આખી લીટી ફઅ,

અથવા (ત્રીજી આકૃતિ પ્રમાણે) બાકી રહેલી ફઅ

આખી અથવા બાકી રહેલી ફડની બરોબર છે,

માટે ફડક, ફઅ ત્રિકોણમાં,

ફડ લીટી ફઅ ની બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું)

અને ડક બાજુ સામેની બાજુ અવની બરોબર છે;

(૧. ૩૪)

અને બહારનો ખૂણા ફડક માંહેના ખૂણા ફઅવની બરોબર છે; (૧. ૨૯)

માટે ફડક ત્રિકોણ ફઅ ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪)

હવે આખી આકૃતિ અવકટ માંથી ફડક ત્રિકોણ બાદ કરીશું તો બાકી જે ભાગ રહેશે તે તેજ આકૃતિમાંથી ફઅ ત્રિકોણ બાદ કરતાં જે ભાગ રહેશે તેની બરોબર થવો જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૩)

પણ એક ત્રિકોણ બાદ કરતાં તો સંખ્યાં ચતુષ્કોણ અવકાશ બાકી રહેશે, અને બીજો ત્રિકોણ બાદ કરતાં સંખ્યાં ચતુષ્કોણ ઇવકાશ રહેશે;

માટે સંખ્યાં ચતુષ્કોણ અવકાશ સંખ્યાં ચતુષ્કોણ ઇવકાશ ની બરોબર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ૪૦

પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંતની પહેલાં જ્યાં જ્યાં બે આકૃતિ એકેકની બરોબર બતાવવામાં આવી છે, ત્યાં ત્યાં “બરોબર” શબ્દનો અર્થ સર્વે પ્રકારે બરોબર એવો કીધો છે; જેમ કે ૪ થા વગેરે સિદ્ધાંતોમાં બે ત્રિકોણો બરોબર કીધા છે, એટલે એવી રીતે કે દરેકની એકેક બાજુ તથા એકેક ખૂણા અનુક્રમે બીજાની એકેક બાજુ તથા એકેક ખૂણાની બરોબર; અને વળી તે આકૃતિઓ સ્થાનોપરી પણ થઈ શકે. પણ આ અને હવે પછીના કેટલાક સિદ્ધાંતોમાં આકૃતિ બરોબર કીધી છે ત્યાં “બરોબર” શબ્દનો અર્થ ફક્ત “ક્ષેત્રફળમાં બરોબર” એમ સમજવો. એક આકૃતિ બીજાના ઉપર સ્થાનોપરી થઈ શકે અથવા ન થાય તોપણ તેમનું ક્ષેત્રફળ એ સિદ્ધાંતોમાં સરખું બતાવ્યું છે. જેમકે, બે કાગળ અથવા લાકડાના ત્રિકોણાકાર અથવા ચતુષ્કોણ કકડા એવા થઈ શકે કે સ્થાનોપરી ન થાય, તે છતાં તેઓનું ક્ષેત્રફળ (તેમની સપાટીમાં આવેલી જગ્યા) સરખું હોય.

ટીપ:—ઉપલી સિદ્ધતાના છેલ્લા ભાગમાં જરા ગુંચવણ જેવું છે. બીજી રીત એ ભાગ સિદ્ધ કરવાની એમ છે;—(આકૃતિ ૨.)

ધારો કે વડ અને કાઢ લીટીઓ ગ બિંદુમાં છેદેછે, તો અવડ અને કાઢ ત્રિકોણો સરખા છે, તેમાંથી કાઢ ત્રિકોણ બાદ કરો, અને વગક ઉમેરો; તો સંખ્યાં ચતુષ્કોણો સરખા થશે.

આકૃતિ ૩ માં સરખા ત્રિકોણોમાં **ઇવકડ** આકૃતિ ઉમેરો,
તો સં બાં ચતુષ્કોણો સરખા થયા.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપરો સિદ્ધાંત સાધારણ પાયા ઉપર લખને સિદ્ધ કરો.

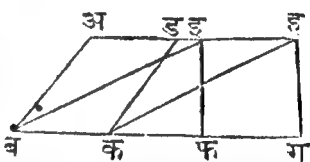
(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ બે
સરખા સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણો હોય તો તેઓ એકજ સ-
માન્તર લીટીઓની વચ્ચે થશે.

સિદ્ધાંત ૩૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—બરોબર પાયા ઉપરના અને એકજ સમા-
ન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો
બરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે **અવકડ** અને
ઇફગહ સમાન્તર બાજુ ચ-
તુષ્કોણો બરોબર પાયાવક
અને **ફગ** ઉપર છે, અને



એકજ સમાન્તર લીટીઓ અહ વગ વચ્ચે છે.

તો સં બાં **અવકડ** સં બાં **ઇફગહ**ની બરોબર
થશે.

રચના.

વહ, કહ સાંધો.

સિદ્ધતા.

વક લીટી **ફગ**ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

અને **ફગ** લીટી સામેની બાજુ **ઇહ**ની બરોબર છે.

(૧. ૩૪.)

માટે, વક લીટી **ઇહ**ની બરોબર છે, (પ. પ્ર. ૧)

અને તેઓ સમાન્તર પણ છે; (પ્રતિ.)

માટે વડ અનેકહ જે તેઓના એકજ તરફના છેડા-
ઓ સાંધે છે તે લીટીઓ પણ સરખી અને સમાન્તર છે.
(૧. ૩૩)

માટે ઇવકહ સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થયો.
હવે અવકહ સં બાં ચતુષ્કોણ ઇવકહની બરોબર છે;
કારણકે એ બે એકજ પાયા વક અને એકજ સમા-
ન્તર લીટીઓ વક, અહની વચ્ચે છે. (૧. ૩૪.)
વળી, ઇફગહ સં બાં ચતુષ્કોણ ઇવકહની બરોબર છે;
કારણ કે તેઓ એકજ પાયા ઇહ અને એકજ સમા-
ન્તર લીટીઓ ઇહ, વગની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

માટે, સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ અવકહ સમાન્તર-
બાજૂ ચતુષ્કોણ ઇફગહ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બરોબર પાયા ઉપર ઈં પ્ર. સિ.

ટીપ:—એવું ધારેલું છે કે બરોબર પાયાઓને એકજ સીધી
લીટીમાં મૂકેલા છે.

ઉપસિદ્ધાંતો:—

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયાના
સરખાજ પાયા ઉપર તેટલીજ ઊંચાઈના કાટખૂણુ ચતુષ્કોણના
ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

(૨) બરોબર પાયા ઉપરના અને બરોબર ઊંચાઈના સમા-
ન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૩) સરખી ઊંચાઈના સં બાં ચતુષ્કોણોમાં જેનો પાયો
મોટો તેનું ક્ષેત્રફળ પણ મોટું; અને પાયા સરખા હોય તો
જેની ઊંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ૩૫ અને ૩૬ માં સિદ્ધાંતોમાં શો ફેર છે?

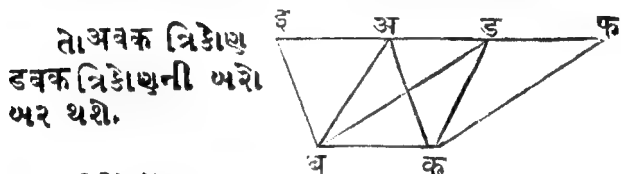
(૨) ઉપલો સિદ્ધાંત અફ ને ડગ લીટીઓ સાંધીને સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે.

સાધન.

એકજ પાયાવક ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વક અને અડ વચ્ચે બે ત્રિકોણો અવક, ડવક છે



રચના.

વ બિંદુમાંથી વડ લીટી ક અને સમાન્તર દોરો; (૧.૩૧)
ધારોકે તે ડ અને લંબાવતાં ઈ બિંદુમાં છેદે છે;
તેમજ ક બિંદુમાંથી વડને એક સમાન્તર લીટી કફ
દોરો જે અડ ને લંબાવતાં ફ બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે ઈવકઅ અને ડવકફ દરેક આકૃતિ
એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

અને વળી તેઓ એકજ પાયા વક ઉપર અને એકજ
સમાન્તર લીટીઓ વક, ફફની વચ્ચે છે,

માટે, ઈવકઅ સંબંધી ચતુષ્કોણ ડવકફની બરોબર છે.
(૧. ૩૫)

અને અવક ત્રિકોણ ઈવકઅ સંબંધી ચતુષ્કોણનો
અર્ધ છે.

કારણ કે અવ કર્ણ તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

વળી ડવક ત્રિકોણ ડવક સં બાંચતુષ્કોણનો
અંધ છે,

કારણ કે ડક તેને દુભાગે છે. (૧.૩૪)

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખાજ છે (પ્ર. પ્ર.૭)

માટે અવક ત્રિકોણ ડવક ત્રિકોણની બરોબર છે;

માટે એકજ પાયા ઉપર ધો

પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બીજા કયા ત્રિકોણો બરોબર છે ?

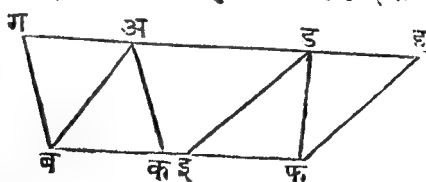
(૨) જો અક, વડ લીટીઓ ન બિંદુમાં છેદે તો બતાવો કે
અનવ, અને કનડ ત્રિકોણો સરખા છે.

(૩) જો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ અવકડની અવબાજુમાં
એક બિંદુ પસંદને પક, પડ દોરી હોય તો, પઅડ, પવક ત્રિકોણ
મળાને પડક ત્રિકોણની બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-બરોબર પાયાઓ ઉપર અને એકજ સ
માન્તર લીટીઓની વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે
સાધન.

ધારો કે અવક, ડફ ત્રિકોણો વક અને ફ બે બરો-



બર પાયાઓ ઉપર, અને વક, અડ સમાન્તર લીટી-
ઓની વચ્ચે છે.

તો અવક ત્રિકોણ ડફ ત્રિકોણની બરોબર થશે.

રચના.

વ બિંદુમાંથી વગ લીટી ક અને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે ડઅ લીટીને લંબાવતાં ગ બિંદુમાં છેદે છે; (૧. ૩૧)
ફ બિંદુમાંથી ફહ લીટી ઇડ ને સમાન્તર દોરો; અને ધારો કે તે અડ ને લંબાવતાં હ બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે ગવકઅ અને ડફહ દરેક સંખ્યાં ચતુષ્કોણ છે,

અને તેઓ બરોબર પાયા વક, ફફ ઉપર છે, અને એકજ સીધી લીટીઓ વફ, ગહ વચ્ચે છે,

માટે ગવકહ, સંખ્યાં ચતુષ્કોણ ડફહની બરોબર છે; (૧. ૩૬)

અને અવક ત્રિકોણ ગવકઅ સંખ્યાં ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે અવ કશુંલીટી તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

અને ડફ ત્રિકોણ ડફહ સંખ્યાં ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે ડફ તેને દુભાગે છે;

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખા છે; (૫. ૫. ૭)

માટે, અવક ત્રિકોણ ડફ ત્રિકોણની બરોબર છે.

માટે, બરોબર પાયાઓ ઉપર ઈં પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવાં અનુમાન થઈ શકે-

છે કે:—

(૧) બરોબર પાયાઓ ઉપરના અને બરોબર ઊંચાઈના ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૨) બે ત્રિકોણો સરખી ઊંચાઈના હોય, તો જોના પાયા વધારે

તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે; અને જે સરખા પાયા ઉપરના ત્રિકોણોમાં જેની ઊંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલા જે સિદ્ધાંતોમાં ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે કે કેમ !

(૨) બન્ને પાયાઓ એકજ લીટીમાં છે તેમ ન લેતાં એક પાયા એકમાં અને બીજો બીજી સમાન્તર લીટીમાં લઇને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ જે નહાના મોટા ત્રિકોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે નથી.

(૪) એક ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ શિરોબિંદુ સાથે જોડાયું હોય, તો જે ત્રિકોણો થાય તે બરોબર.

(૫) જો એક ત્રિકોણની જે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની જે બાજુઓની બરોબર હોય, અને માંહેલા ખૂણા ન્યૂનતાપૂર્વક હોય તો તે ત્રિકોણો બરોબર થશે.

(૬) પ્રશ્ન ૪ અને ૫ નો અર્થ એકજ છે તે બતાવો.

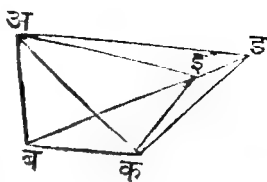
સિદ્ધાંત ૩૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ જે બરોબર ત્રિકોણો હોય, તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે હોવા જોઇએ.

સાધન.

ધારો કે અબક, ઢબક ત્રિકોણો એકજ પાયા બક ઉપર અને તેની એકજ (ઉપરની) બાજુએ છે; અને તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર છે;

તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે થશે; એટલે, અડ સાંધિયે, તો અડ લીટી વક ને સમાન્તર થશે.



રચના.

જો અડ લીટી વકને સમાન્તર ન હોય, તો અ બિંદુ-માંથી જો બની શકે તો બીજી લીટી અડ વકને સમાન્તર દોરો.

ધારો કે તે લીટી વડ ને અથવા તેને લંબાવતાં ૩ બિંદુમાં મળે છે. ફક સાંધો.

સિદ્ધાંતા.

એકજ પાયા વક ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વક, અડ ની વચ્ચેના ત્રિકોણો અવક, ડવક બરોબર છે; (૧. ૩૭)

પણ અવક ત્રિકોણ ડવક ની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે ડવક ત્રિકોણ અવક ત્રિકોણની પણ બરોબર છે. (પ. પ્ર. ૧)

આમો ત્રિકોણ તેના ભાગની બરોબર; એ અશક્ય છે (પ. પ્ર. ૯)

માટે અડ લીટી વક લીટીને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, એવું સિદ્ધ થઈ શકે કે અ બિંદુમાંથી અડ શિવાય કોઈ પણ લીટી વકને સમાન્તર નથી.

માટે અડ લીટી વક ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ધૃ

પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાય છે કે એકજ પાયા ઉપર બરોબર ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઊંચાઈ બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં અડલીટીની નીચે અડપડેછે; પણ અડ બહાર પડે તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર છે.

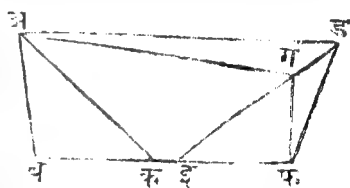
(૩) એજ લીટી પાયાની અર્ધ છે.

સિદ્ધાંત ૪૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા બરોબર પાયાઓ ઉપર તેની એકજ બાજુએ આવેલા બરોબર ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

સાધન.

એકજ સીધી લીટી વર્ષમાં આવેલા સરખા પાયાવક અનેડફઉપર અને તેઓની એકજ



(ઉપલી) બાજુએ બે ત્રિકોણો અવકાશ ડફ છે;

તો તે ત્રિકોણો એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચેથશે.

એટલે અડ બિંદુઓ સાંધાયે તો અડ લીટીવર્ષ ને સમાન્તર થશે.

રચના.

જો અડ લીટી વર્ષ ને સમાન્તર ન હોય તો અ બિંદુ માંથી બની શકે તો, અગ લીટી વર્ષને સમાન્તર દારો.

દારો કે તેડ ને (અથવા તેને લાંબાવતાં) ગ બિંદુમાં મળે છે,

ગ વર્ષ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે અવક ત્રિકોણ ગડફ ત્રિકોણની બરોબર છે; કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા વક, ફફ ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વક, અગની વચ્ચે છે. (૧.૩૮)

પણ અવક ત્રિકોણ તો ડફ ત્રિકોણની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે ડફ ત્રિકોણ પણ ગડફ ત્રિકોણની બરોબર છે. આઓ પોતાના ભાગની બરોબર; એ અશક્ય છે. (પ. પ્ર. ૯)

માટે અગ લીટી વક ને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, આપણે બતાવાયું કે અડ શિવાયકોઈ પણ લીટી અ બિંદુમાંથી વક ને સમાન્તર દોરાય નહિ.

માટે અડ લીટી વક ને સમાન્તર છે-

માટે એકજ સીધી લીટીમાં ઈં પ્ર.સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાય છે કે:—

(૧) સરખા પાયા ઉપર સરખા ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઉંચાઈ પણ બરોબર છે.

(૨) સરખા ત્રિકોણો બરોબર ઉંચાઈનાં હોય તો તેમના પાયા બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં દોરેલી અગ લીટી અડ ની નીચે પડે છે, તે ઉપરથી જાય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) ડ બિંદુમાંથી સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

પહેલા ૪૦ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) “કોઈએ ત્રિકોણો અથવા સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણોમાં (૧) પાયાની સમાનતા (૨) ઊંચાઈની સમાનતા (૩) ક્ષેત્રફળની સમાનતા, એ ત્રણમાંથી એ આપી હોય તો ત્રીજી નિકળશે.” આ વાક્યમાંથી છ સિદ્ધાંતો ઉપજી શકે છે, તેઓની પ્રતિજ્ઞા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) જે ચતુષ્કોણના બન્ને કર્ણો તેને દુભાગે છે તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણના એ કર્ણોથી ચાર ત્રિકોણો થાય છે તે બરોબર છે.

(૪) કોઈપણ ચતુષ્કોણના એ કર્ણોથી થયેલા એ સામ-સામેના ત્રિકોણો બરોબર હોય તો બાકી રહેલી એ બાજુઓ સમાન્તર થશે.

(૫) એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સાંધવાથી જે ચાર ત્રિકોણો થાય તે બરોબર છે.

(૬) એક કાટખૂણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુનાં મધ્ય-બિંદુઓ સાંધતાં એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

(૭) એક ચોરસની પાસપાસેની બાજુનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધતાં એક ચોરસ થશે.

(૮) એક ત્રિકોણની એક બાજુનાં કોઈપણ બિંદુમાંથી બીજી એ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરતાં જે ચતુષ્કોણ થશે તે ત્રિકોણનો અર્ધ થશે.

(૯) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના બન્ને છેડામાંથી સામેની બાજુનાં કોઈપણ બિંદુસુધી લીટીઓ દોરી તો જે ત્રણ ત્રિકોણો થશે તેમાં એક બીજા બેના સરવાળા બરોબર થશે.

(૧૦) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સામેના ખૂણા સાથે સાંધવાથી જે ત્રણ ત્રિકોણ અને એક ચતુષ્કોણ થશે, તેમાં સામસામેના ત્રિકોણો બરોબર થશે, અને બાકી રહેલા ત્રિકોણ ચતુષ્કોણની બરોબર થશે.

(૧૧) સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી સામેની બાજુના એક છેડા સુધી લીટી દોરવાથી જે ત્રિકોણ થશે તે સં બાં ચતુષ્કોણોનો એક ચતુર્થાંશ થશે.

(૧૨) ૧. ૧૬ની આકૃતિમાં અવક, ફવક ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૧૩) એક એવી લીટી દોરો કે તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ એક આપેલા ત્રિકોણના પાયાના બે છેડા સાથે સાંધીએ તો જે નવા ત્રિકોણો થાય તે આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય.

(૧૪) એક સમઘ્નિબાજુ ત્રિકોણ એવો દોરો કે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેજ પાયા ઉપર હોય.

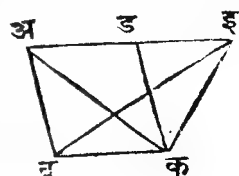
(૧૫) કોઈ પણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, તેની બરોબર પાયા તથા ઉચ્ચાઈના એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે; અને એક એવાજ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ ક્ષેત્રફળના અર્ધની બરોબર છે.

સિદ્ધાંત ૪૧. પ્રમેય,

પ્રતિજ્ઞા:—એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર બાજુઓની વચ્ચે હોય, તો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમણો થશે.

સાધન.

ધારો કે અવકડ સં બાં ચતુષ્કોણ તથા ફવક ત્રિકોણ એકજ વક પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વક, અઈની વચ્ચે છે.



તો અવકડ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણુ ઇવક ત્રિકો-
ણનો બમણો થશે.

રચના:—અક સાંધો.

સિદ્ધતા.

અવક ત્રિકોણુ ઇવક ત્રિકોણુની બરોબર છે.

કારણ કે તેઓ એકજ વક પાયા ઉપર, અને એકજ
સમાન્તર લીટીઓ વક, અડ ની વચ્ચે છે, (૧. ૩૫)

પણ અવકડ સંબાં ચતુષ્કોણુ અવક ત્રિકોણુનો
બમણો છે,

કારણ કે અક કર્ણ તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

માટે, અવકડ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણુ ઇવક ત્રિકો-
ણનો પણ બમણો છે.

માટે, એક સં બાં ચતુષ્કોણુ ઈં પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત બીજી રીતે આ પ્રમાણે લખાય:—

જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુના પાયા તથા
ઈચાઈ બરોબર હોય, તો સં બાં ચતુષ્કોણુ ત્રિકોણુનો બમ-
ણો થશે.

તેમજ:—જો એક સં બાં ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુની ઈં-
ચાઈ બરોબર હોય, અને ત્રિકોણુનો પાયો સં બાં ચતુષ્કોણુના
પાયાના બમણો હોય તો તે ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુ બરોબર
થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સં બાં ચતુષ્કોણુ અને એક ત્રિકોણુ બરોબર
પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે હોય, તો
સં બાં ચતુષ્કોણુ ત્રિકોણુના બમણા બરોબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણુ સમઘ્રિબાજૂ ત્રિકોણુ એવો બનાવો
કે તે એક આપેલા ચોરસની બરોબર હોય.

(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બહાર એક બિંદુ
ઢાળને તેને બે સામસામેની બાજૂના છેડાઓ સાથે સાંધીએ તો
તે બે ત્રિકોણો થશે તેના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી આપેલા
ચતુષ્કોણની અર્ધ થશે.

સિદ્ધાંત ૪૨. કૃત્ય.

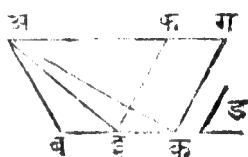
પ્રતિજ્ઞા:—એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કરો કે
તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો
એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે અવક આપેલો ત્રિ-
કોણ છે,

અને ડ આપેલો ખૂણો છે,

તો એક સં બાં ચતુષ્કોણ



અવક ત્રિકોણની બરોબર, અને

તેનો એક ખૂણો ડ ખૂણાની બરોબર હોય, એવો કરવો છે.

રચનાં.

બક લીટીને ઇ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦) અને અઇ
સાંધો;

કઇ લીટીમાં ઇ બિંદુ આગળ કફ ખૂણો ડ બરો-
બર કરો; (૧. ૨૩)

અને અ બિંદુમાંથી અફગ લીટી ઇક ને સમાન્તર
દોરો. (૧. ૩૧)

અને ક બિંદુમાંથી કગ લીટી ઇફ ને સમાન્તર દોરો.
ત્યારે ફકગ માગેલો સં બાં ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

અવક અને અઇક ત્રિકોણો બરોબર છે.

કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા વડે, ફક ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)

માટે અવક ત્રિકોણ અફક નો બમણો છે;

પણ ફફકગ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ અફક ત્રિકોણનો બમણો છે.

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા ફક અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ ફક, અગ ની વચ્ચે છે, (૧. ૪૧)

માટે ફફકગ સં બાં ચતુષ્કોણ અવક ત્રિકોણની બરોબર થયો.

અને વળી તેનો એક ખૂણો કફ આપેલા ડ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે એક એવો સં બાં ચતુષ્કોણ કીધો ઇંક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત અવ લીટીના અર્ધ ઉપર સં બાં ચતુષ્કોણ કહાડી બતાવો.

(૨) ડ ખૂણાની બરોબરનો ખૂણો ક અથવા બ આગળ બનાવીને માગ્યા પ્રમાણેનો સં બાં ચતુષ્કોણ કરો.

(૩) આપેલો ખૂણો પહોળો ખૂણો લઇને કૃત્ય કરો.

(૪) એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક ચોરસ બનાવો.

(૫) એક સં બાં ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે એક આપેલા ચોરસની બરોબર થાય અને તેજ પાયા ઉપર હોય અને તેનો એક ખૂણો એક કાટખૂણાનો અર્ધ હોય.

(૬) એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જે એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બરોબર થાય અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

(૭) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે તે એક

આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેની બાજુઓનો સંધા-
નો ત્રિકોણની બાજુઓના સંધાગાની બરોબર હોય.

(૮) એક કાટખણ ચતુષ્કોણની બરોબર ક્ષેત્રફળનો એક
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બનાવ્યો હોય તો ત્રિકોણની પરિમિતિ
(બાજુઓનો સંધાગા) ચતુષ્કોણની પરિમિતિ કરતાં વધારે થશે.

વ્યાખ્યા:—એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણમાં એક
બિંદુ લઈએ. અને તેમાંથી સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને
સમાન્તરલીટીઓ દોરીએ તો તે આખી આકૃતિના જે ચાર
ભાગ થશે, તેમાંથી જે બેમાંથી કર્ણ પાર જાય છે, તેને
“કર્ણની આસપાસના સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણો”
કહેવા; અને જે બાજુ બે તે આકૃતિ પરી કરવાને બાકી રહ્યા
તેને તે “સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ” અથવા
“પૂરકસમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો” કહેવા.

જેમકે નીચેના સિદ્ધાંતની આકૃતિમાં અડલહ અને લગકફ
એ કર્ણની આસપાસના તથા હલફડ અને હબગલ એ પૂરક-
સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો થયા.

સિદ્ધાંત ૪૩. પ્રમેય.

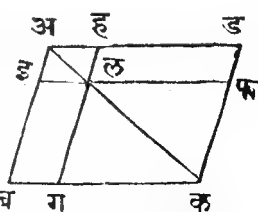
પ્રતિજ્ઞા:—કોઈ પણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણમાં કર્ણની
આસપાસના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ
બરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે અબકડ એક સમા-
ન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે;

અને લડ, લબ તેના પૂરકસ-
માન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો છે;

એટલે તેના કર્ણ અકની આ-
સપાસના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો હા, ગફની પૂરવણીઓ છે.



ત્યારે પૂરક સં બાં ચતુષ્કોણ બલ પૂરક સં બાં
ચતુષ્કોણ લંડ ની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

ઈહ સમબાળુ ચતુષ્કોણ છે, અને અલ તેના કર્ણ છે;
માટે અહિંલ ત્રિકોણ અહિંલ ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૩૪)
એજ પ્રમાણે, લગક ત્રિકોણ લગક ત્રિકોણની બરો-
બર છે.

પણ આખો અવક ત્રિકોણ આખો અહક ત્રિકોણની
બરોબર છે.

કારણ કે અક કર્ણ તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

માટે બાકી રહેલો પૂરક સં બાં ચતુષ્કોણ બલ બાકી
રહેલો પૂરક સં બાં ચતુષ્કોણ લંડની બરોબર છે.

માટે કોઈપણ સં બાં ચતુષ્કોણના ઈં પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) જે ચાર માંહેલા ચતુષ્કોણ છે તે સમાન્તરબાળુ ચતુ-
ષ્કોણ છે એવું બતાવો; અને તેઓ આપેલા સં બાં ચતુષ્કો-
ણને સમકોણ છે એવું બતાવો.

(૨) બીજાં કર્ણ દોરીને તેમાં બિંદુ લઈને સિદ્ધાંત સિદ્ધ
કરો.

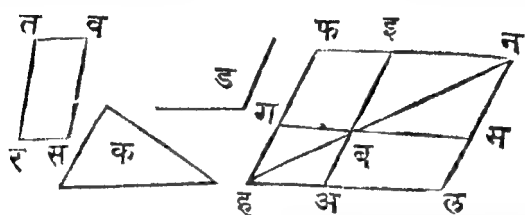
(૩) જો કર્ણમાં બે બિંદુઓ લઈને તે બંનેમાંથી સમાન્તર
લીટીઓ દોરી તો જૂદી જૂદી કેટલી આકૃતિઓ થશે ?

તે બધા સં બાં ચતુષ્કોણ છે એવું બતાવો, અને તે-
માંના કયા કયા બરોબર છે તે બતાવો.

સિદ્ધાંત ૪૪. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક આપેલી સીધી લીટીને એક એવો

સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.



(એક સંખ્યા ચતુષ્કોણ એક લીટીને લગાડવો, એટલે એક એવો સંખ્યા ચતુષ્કોણ કહાડવો કે તે લીટી તેની એક બાજુ થાય.)

સાધન.

ધારો કે અવ આપેલી લીટી છે, ક આપેલો ત્રિકોણ છે; અને હ આપેલો ખૂણો છે.

તો અવ સીધી લીટીને એક એવો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ લગાડવો છે કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેનો એક ખૂણો હ ખૂણા બરોબર હોય.

રચના.

એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ રસવત એવો બનાવો કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેનો સ ખૂણો હ ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

અવ લીટી વધારીને વડ લીટી સવ બરોબર કાપો; વ બાજુ આગળ ઇવ લીટીમાં ઇવગ ખૂણો સ ખૂણા બરોબર કરો; (૧. ૨૩)

વગ લીટી રસ બરોબર કાપો;

इ.अने ग ङिंदुओमांथी इफ, गफःलीटीओ वग,
वइ ने अरस्परस सभान्तर दोरो, (१. ३१)

હવે વફ એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ થયો, જે
રચના પ્રમાણે સત્ર ની એટલે કે ત્રિકોણની બરોબર છે,
અને તેનો વ બૂણો કે બૂણા બરોબર છે.

अ ङिंदुमांथी अह लीटी वग अथवा इफ सभान्तर
दोरो. (१. ३१)

અને ફગ ને લંબાવતાં ધારો કે તેહ બિંદુમાં મળે છે.
હવે સાંધો.

હવે, અહ અને ફફ સમાન્તર છે, અને હફ લીટી
તેઓને મળે છે,

માટે અહફ અને હફઈ બૂણા મળીને બે કાટબૂણા
બરોબર છે, (૧. ૨૯)

માટે, વહફ અને હફઈ મળીને બે કાટબૂણા કરતાં
ઓછા છે,

માટે, હવ અને ફઈલીટીઓને વ અને ફ તરફ લંબા-
વતાં મળશે. (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

ધારો કે તેઓ ન બિંદુમાં મળે છે.

न ङिंदुमांथी नल लीटीइअ अथवा फह ने सभान्तर
दोरो. (१. ३१)

અને ધારો કે અહ, ગવ ને લંબાવતાં તેઓ નલ ને લ
અને મ બિંદુઓમાં મળે છે.

ત્યારે વલ માગેલો સં બાં ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

ફહલન એક સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

માટે, લવ, વફ પૂરક સં બાં ચતુષ્કોણો થયા.

માટે, લવ સં બાં ચતુષ્કોણ વફ ની બરોબર છે;
(૧. ૪૦)

પણ ક ત્રિકોણ વફ ની બરોબર છે; (૨૫.)

માટે લવ સં બાં ચતુષ્કોણ પણ ક ત્રિકોણની
બરોબર છે.

વળી અવમ ખૂણા સામેના ખૂણા ગવડની બરોબર
છે; (૧. ૧૫)

પણ ગવડ ખૂણા તો ડ ખૂણા બરોબર છે, (૨૫.)

માટે, અવમ ખૂણા પણ ડ ખૂણા બરોબર છે.

અને વળી વલ સં બાં ચતુષ્કોણની અવ એક
બાજુ છે;

માટે અવ લીટીને એક એવો સં બાં ચતુષ્કોણ લવ
લગાડ્યો કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર છે,

અને તેના એક ખૂણા અવમ આપેલા ખૂણા ડ ની
બરોબર છે.

માટે, એક આપેલી સીધી લીટી ૪૦ કુ. કુ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૨ અને ૪૪ સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો ફેર છે ?

(૨) અવ લીટીને વ આગળથી નહિ, પણ અ આગળથી
લંબાવીને કૃત્ય કરો.

(૩) વડ લીટી ન સાંધતાં અગ સાંધીને પછી સર્વ રચના
ઉપર પ્રમાણેજ કાઢી, તો જેવો જોઈએ છે તેવો સં બાં
ચતુષ્કોણ થશે કે નહિ ?

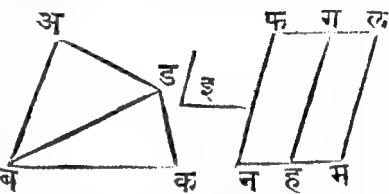
(૪) એક એવો કાટખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડો કે તે એક
આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય અને તેની એક બાજુ એક
આપેલી લીટી બરોબર હોય.

સિદ્ધાંત ૪૫. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:-એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બનાવો કે તે એક આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરાબર થાય.

સાધન.

ધારો કે અવકડ એક આપેલી સીધી લીટી આકૃતિ છે; અને \angle આપેલો ખૂણો છે. તો એક સમાન્તર



બાજૂ ચતુષ્કોણ એવો બનાવવો છે કે જે અવકડની બરાબર થાય, અને જેનો એક ખૂણો \angle ખૂણા બરાબર થાય.

રચના.

વડ સાંધો.

અવકડ ત્રિકોણની બરાબર એક ફહ સમાન્તર બાજૂ ચતુષ્કોણ બનાવો, જેનો ફનહ ખૂણો \angle ખૂણા બરાબર હોય. (૧. ૪૨)

અને ગહલીટીને એક ગમ સ, બાં ચતુષ્કોણ લગાડો, જે અવકડ ત્રિકોણની બરાબર હોય, અને જેનો ગહમ ખૂણો \angle ખૂણાની બરાબર હોય. (૧. ૪૪) ત્યારે ફનમલ માંગેલો સં બાં ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

ગહમ અને ફનહ દરેક \angle ખૂણાની બરાબર છે.

માટે ફનહ ખૂણો ગહમ ની બરાબર છે.

એ દરેક સરખા ખૂણામાં ગહન ખૂણો ઉમેરો;

તો ફનહ અને ગહન ખૂણા ગહમ અને ગહન ખૂણાની બરાબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ ફનહ, ગહન મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

માટે ગહમ, ગહનખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા
બરોબર છે.

માટે, નહ, હમ, એ બે લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં
છે, (૧. ૧૪)

વળી, નમ અને ફગ સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ
મળે છે,

માટે મહગ, હગફ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

એ બંનેમાં હગલ ખૂણા ઉમેરે;
ત્યારે મહગ, હગલ ખૂણા મળીને હગફ, હગલ ખૂણાની
બરોબર છે.

પણ હમ લીટી ગલને સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ
મળે છે,

માટે, મહગ, હગલ ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા
બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે, હગફ, હગલ ખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા
બરોબર છે.

માટે, ફગ, ગલ લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.
(૧. ૧૪)

અને વળી નફ અને મલદરેક હગને સમાન્તર છે. (૨૫.)

માટે નફ લીટી મલને સમાન્તર છે. (૧. ૩૦)

અને નમ, ફલ સમાન્તર છે; (૨૫.)

માટે, ફનમલ સમાન્તર બાજુચતુષ્કોણ થયો. (વ્યા. ૩૬)

અને ફહ સં બાં ચતુષ્કોણ અવક ત્રિકોણની
બરોબર છે, (૨૫.)

અને ગમ સં બાં ચતુષ્કોણ ડવક ત્રિકોણની
બરોબર છે; (૨૫.)

માટે આખો ફનવલ સં બાં ચતુષ્કોણ અવકડ
આકૃતિની બરોબર છે;

અને તેનો ફનમ ખૂણા ૩ બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે આપેલી આકૃતિ ચારથી વધારે બાજુની
હોય તેના બરોબર પણ સં બાં ચતુષ્કોણ બનાવી
શકાય.

માટે એક એવો સં બાં ચતુષ્કોણ ઈં કું કું

ઉપસિદ્ધાંતઃ—એક આપેલી લીટી ઉપર એક એવો
સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે જે એક આપેલી સીધી
લીટી આકૃતિની બરોબર હોય, અને જેનો એક ખૂણા આપેલા
ખૂણા બરોબર હોય.

ટીપઃ—જો આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજુની હોય તો તેનું
એક શિરોબિંદુ બીજાં બિંદુઓ સાથે સાંધતાં ત્રણ ત્રિકોણો થશે,
તેમાં બે ત્રિકોણોની બરોબર તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે એક
સંબાંચતુષ્કોણ બનાવી શકાશે; પછી લમલીટી ઉપર એક સં
બાંચતુષ્કોણ એવો લગાડો કે તે બાકી રહેલા ત્રિકોણની બરોબર
હોય; અને તેનો મ આગળનો ખૂણો આપેલા ખૂણા બરોબર
હોય; એટલે, આ નવી થયેલી આકૃતિ સં બાં ચતુષ્કોણ સિદ્ધ
ધર્મ શકશે, અને તે માગવા પ્રમાણેનો છે એવો સ્પષ્ટ છે.
એજ પ્રમાણે પાંચથી પણ વધારે બાજુઓ આપેલી
આકૃતિનું હોય તો કયાં જવું.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજુની હોય તો ઉપલું કૃત્ય
કરી આપો.

(૨) એક આપેલી સીધીલીટી આકૃતિ બરોબર એક કાટ-
ખૂણ ચતુષ્કોણ કઢાડવો.

પહેલા ૪૫ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના ખૂણા બિંદુઓમાંથી તેના કણોને સમાન્તર લીટીઓ દોરી હોય તો એક નવા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ પેદાવાનો બમણો થશે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના એક કર્ણની આસપાસના સં બાં ચતુષ્કોણોના કર્ણની એક બેડ સમાન્તર છે.

(૩) એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર એક બીજે ત્રિકોણ કઢાડવો, જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.

(૪) એક સં બાં ચતુષ્કોણની બરોબર એક બીજે સં બાં ચતુષ્કોણ કઢાડવો જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણા બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બરોબર એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ કઢાડો.

(૬) એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે તે આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણા બરોબર હોય, અને તે ખૂણાની જોડની એક બાજૂ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

(૭) એક ત્રિકોણની એક બાજૂમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તે તે ત્રિકોણના એ સરખા ભાગ કરે.

સિદ્ધાંત ૪૬. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવો.

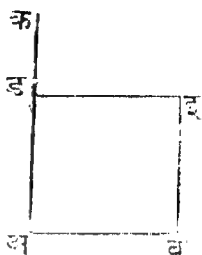
સાંન.

અવ આપેલી સીધી લીટી છે; તેના ઉપર એક ચોરસ કરવાનો છે.

રચના.

અ બિંદુમાંથી અક લીટી અવ ન લંબ દારો;

(૧. ૧૧.)



અડ લીટી અવ જેટલા કરો; (૧. ૩)

ડ બિંદુમાંથી ડઈ લાટી અવ ને સમાન્તર દારો; (૧. ૩૧)

અને વ બિંદુમાંથી વઈ લીટી અડ ને સમાન્તર દારો;

ધારો કે તે ડઈ લીટીને ઈ બિંદુમાં છેદે છે.

તો અડઈવ એક ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે અડઈવ એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે,

માટે, અવ લીટી ડઈ ની બરોબર છે; અને અડ, વઈ બરોબર છે; (૧. ૩૪)

પણ અડ લીટી અવ બરોબર છે;

માટે, ચારે બાજુઓ અવ, અડ, ડઈ ઈવ એકેકને બરોબર છે;

એટલે, અડઈવ આકૃતિ સમબાજૂ છે.

વળી વઅડ ખૂણા કાટખૂણા છે, (૨૫.)

અને, અડ, વઈ સમાન્તર લીટીઓ ઉપર અવ પડે છે.

માટે વઅડ, અવઈ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે.

(૧. ૨૮)

માટે અવઈ ખૂણા પણ એક કાટખૂણા બરોબર હોવો જોઈએ.

અને તેઓની સામેના ખૂણા અનુક્રમે તેઓની બરોબર છે.

માટે, દરેક ખૂણા એક કાટખૂણા બરોબર છે.

એટલે, અઘડે એક ચોરસ થયો;

અને તે અઘ લીટી ઉપર બનાવ્યો છે;

માટે એક આપેલી લીટી ઈ〇 ક. ક.

ઉપસિદ્ધાંત—(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે; એ વિશે ૩૪ મી વ્યાખ્યાની ટીપમાં કહ્યું છે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બે પાસપાસેની બાજુઓ બરોબર હોય; અને તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય, તો તે એક ચોરસ થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક લીટી ઉપર કેટલા ચોરસ બનાવી શકાય ?

(૨) બરોબર બાજુ ઉપરના ચોરસ પણ બરોબરજ હોવા નોંધએ.

(૩) જો બે લીટીઓ બરોબર હોય તો એક લીટી ઉપરનો ચોરસ બીજી લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે.

(કહ્યું દોરવાથી જે બધે ત્રિકોણ થશે તે સેહેજમાં બરોબર છે એવું સાબિત થઈ શકશે.)

સિદ્ધાંત ૪૭, પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા—એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કહ્યું ઉપર કહાડેલો ચોરસ બીજો બે બાજુઓ ઉપર કહાડેલા ચોરસના સ્વભાવની બરોબર છે

સાધન

ધારોકે અવક એક કાટખૂણ ત્રિકોણ છે,

જેનો વચક ખૂણો કાટખૂણો છે;
 તે વક કહી ઉપર કહાડેલો ચોરસ
 બે બાજુઓ વચ, અક ઉપર કહાડેલા ચોરસોના
 સર્વાણની બરોબર છે.

રચના

કવ લીટી ઉપર વડફ ચોરસ દોરો. (૧.૪૬)
 અને વચ, અક ઉપર વચગફ, અકમહ ચોરસો દોરો.
 અ બિંદુમાંથી અલ લીટી વડ અથવા કઈને સમાન્તર
 દોરો; (૧.૩૧)

અને અડ, ફક સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે વચક અને વચગ દરેક
 કાટખૂણો છે.

માટે, કેઅ, અગ, લીટીઓ એ
 કુળસીંધી લીટીમાં છે. (૧.૧૪)

વળી કવડ ખૂણો ફવઅ, ખૂ
 ણાની બરોબર છે,

કારણકે દરેક કાટખૂણો છે,

તેઓમાં અવક ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે આખો ખૂણો અવડ આખા ખૂણા ફવકની
 બરોબર છે.

ત્યારે અવડ, ફવક ત્રિકોણોમાં,

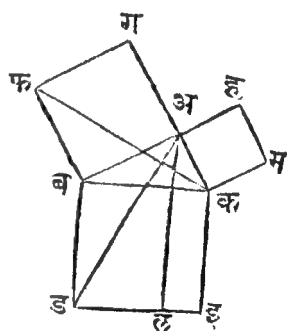
{ અવ લીટી ફવ ની બરોબર છે.

{ અને વડ લીટી વકની બરોબર છે, '.

{ અને અવડખૂણો ફવક ખૂણાની બરોબર છે.

માટે, અવડ ત્રિકોણ ફવક ત્રિકોણની બરોબર છે.

(૧.૪)



હવે વલ સં બાંચતુષ્કોણુ અબડ ત્રિકોણુનો બમણો છે.

કારણકે તેઓ એકજ પાયાવડ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વડ અને અલ ની વચ્ચે છે. (૧.૪૧)

અને ગવ ચોરસ ફવક ત્રિકોણુનો બમણો છે,

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા ફવ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ ફવ, ગક ની વચ્ચે છે. (૧.૪૧)

પણુ સરખી વસ્તુઓનાં બમણાં સરખાંજ હાવાં જોઈએ; (પ્ર. પ્ર. ૬)

માટે વલસં બાંચતુષ્કોણુ ગવચોરસની બરોબર છે.

એજ પ્રમાણુ, અઈ, વમ સાંધવાથી, એમ સિદ્ધ કરી શકીશું કે કલ સં બાંચતુષ્કોણુ કહ ચોરસની બરોબર છે.

માટે આખો ચોરસ વઈ, બે ચોરસો વગ અને હક ના સર્વાળાની બરોબર છે.

એટલે, વક કણુ ઉપર કહારેલો ચોરસ બે બાજુઓ અબ, વક ઉપર કહારેલા ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે

માટે એક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં ઈં પ્રં સિં

ટીપ:—દરેક ચોરસ બહારથી દોરેલો છે; પણ તેમ કરવું આ વચ્ચક નથી; બધા અંદર પડતા અથવા હરકોઈ એક અથવા બે અંદર પડતા કહારીશું તો પણ સિદ્ધતા મળી શકશે; માટે જૂદી જૂદી આઠ આકૃતિઓ થઈ શકે.

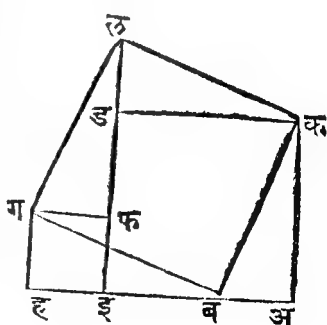
(૨) કાઠખણુ બાજુ ઉપરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તે બાજુને તેટલેજ ગુણવાથી આવે, માટે, અંકગણીતની રીતે આ સિદ્ધાંત કહેવો હોય તો એમ કહેવાય કે એક કાટખૂણુ ત્રિકોણના કણુની લંબાઈનો વર્ગ તેની બન્ને બાજુઓની લંબાઈના વર્ગના સર્વાળાની બરોબર છે.

(૩) માટે ત્રણમાંથી હરકોઈ જે બાજુઓની લંબાઈ આપી હોય તો ત્રીજીની લંબાઈ નીકળી શકશે.

(૪) ગમે એટલી સીધી લીટીઓ આપી હોય તો એક એવી સીધી લીટી શોધી કહાડવી કે તેનો વર્ગ આપેલી બધી લીટી ઓના વર્ગના સર્યાળાની બરાબર હોય, આ કરવું સહેલું છે, ગમે તે જે લીટી લઈને તેમને છેડેથી એકેક ઉપર લંબ મૂકવી એટલે તેમના બીજા છેડા જોડવાથી નવી લીટી નીકળશે, જેનો વર્ગ તે જેના વર્ગના સર્યાળા બરાબર થશે. પછી તે લીટીને એક છેડેથી એક ત્રીજી લીટી જેટલી લંબ દોરીને, છેડા સાંધીશું તો એક નવી લીટી નીકળશે ઈ; એમજ વર્ગોની બાદબાકી પણ થઈ શકશે.

આ સિદ્ધાંતના જે બીજા પૂરાવા આપી શકાય છે તેમાં એક ઘણો ટુંકો અને ચતુરાઈવાળો છે એટલુંજ નહિ પણ તેમાં ૩૨ મા સિદ્ધાંત પછીનો ટોચ સિદ્ધાંત આધાર માટે લીધો નથી; અને કાગળ અથવા લાકડાના કકડા તેવા આકારના લેવાથી એક ચોરસના કકડા ગોઠવતાં બરાબર બીજા જે ચોરસ આપણી નજર સમક્ષ થઈ શકે છે; તે એક સિદ્ધતા નીચે ટુંકામાં આપી છે.

અવક આપેલો ત્રિકોણ છે; અ કાટખૂણો; અક ઉપર અકડઈ ચોરસ કાધો. ઇડ અને લીટીમાંથી ઇફ=ચઅ કાપી. ઇફ ઉપર ઇફગઠ ચોરસ કાધો. ઇડને લંબાવીને ડલ=અવ કાપી; કલ, લગ, ગવ, સાંધી.



ડલ=અવ. ∴ ડલ+ડફ=અવ+ડફ=ફ + ડફ=ડફ=અક
તેમજ હવ=હફ+ફવ=અવ+ફવ=અફ=અક.

આ ઉપરથી ચારે ત્રિકોણો અવક, વગહ, લગફ અને
લડક બરાબર થશે, કારણ કે દરેકમાં બે બાજુઓ અને
વચ્ચેનો કાટખૂણો સરખાં છે.

માટે લગકવ આકૃતિ સમબાજુ થઈ,

લકવ=લકડ+લકવ=અકવ+લકવ+લકવ

માટે લકવ કાટખૂણો થયો; એજ પ્રમાણે ચારે ખૂણા
કાટખૂણા સિદ્ધ થશે, માટે એ આકૃતિ ચોરસ છે અને વક
લીટી ઉપર ચોરસ છે.

એ ચોરસમાંથી બે ત્રિકોણો લડક અને લગફ બાદ કરો
અને તેઓની બરાબરના ત્રિકોણો અવક અને વગહ ઉમેરો
તો બરાબર અડ અને ગહ ચોરસો થશે.

આ સિદ્ધાંત ગણિતવિદ્યાના હરેક ભાગમાં બેહદ ઉપયો-
ગનો છે. એમાંથી હદ ઉપરાંત પરિણામો નિકળે છે. આખી
ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વોમાં એ ઘણોજ પ્રખ્યાત છે એટલુંજ
નહિ પણ એના ઉપર માપણીના બધા સિદ્ધાંતો તથા ત્રિકોણ-
મિતિની વિદ્યા આધાર રાખે છે.

કહે છે કે એ પ્રતિજ્ઞા જ્યારે પિથાગોરસે શોધી કઢાડી અને
તેની સત્યતા ત્રિશે જ્યારે તેને પહેલું જ્ઞાન થયું ત્યારે તને
એટલો હર્ષ પ્રાપ્ત થયો કે તેણે એકસો જતાવરનો મ્હોટો
બલિદાન દેવતાઓને આપ્યો (અર્પણ કર્યો).

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિ ઉપરથી સાબિત કરો કે:—

- (૧) વગ, કહ જોડિયે તો તેઓ સમાન્તર થશે;
- (૨) ફ, અ, મ બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે;
- (૩) ફક અને અડ એકેકને લંબ છે;

(૨) એક ચોરસના કર્ણ ઉપર દોરેલો ચોરસ અસલ ચો-
રસનો બમણો થશે.

(૩) જો કોઈપણ ત્રિકોણના ચિરોબિંદુથી પાયા ઉપર લખ દોરી, તો ખંડો (પાયાના બે ભાગો) ના વર્ગની બાદબાકી તે બે બાજુઓના વર્ગની બાદબાકીની બરાબર થશે.

(૪) બે કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં એકનો કર્ણ અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજાના કર્ણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરાબર થશે.

(૫) એક લીટી એવી શોધી કહાડો કે તે ઉપરનો ચોરસ બે આપેલી લીટીઓના ચોરસની બાદબાકી બરાબર થાય.

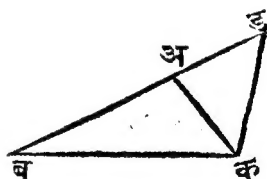
(૬) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે એક ભાગ ઉપરનો ચોરસ બીજા ભાગ ઉપરના ચોરસનો બમણો થાય.

સિદ્ધાંત ૪૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:-જો એક ત્રિકોણની એકબાજુ ઉપર કીધેલો ચોરસ બીજા બે બાજુ ઉપરના ચોરસોના સર્યાજાની બરાબર હોય, તો તે બે બાજુઓની વચ્ચેના ખૂણા કાટખૂણા થશે.

સાધન.

ધારો કે અવક એક ત્રિકોણ છે; અને ચક્ર ઉપર કહાડેલા ચોરસ અવ, અક ઉપરના ચોરસોના સર્યાજાની બરાબર છે; તો અવક ખૂણા કાટખૂણા થશે.



રચના.

અ બિંદુમાંથી અડ લીટી ચક્રને લંબ દોરો; (૧. ૧૧)
અને અડ ને અવ બરાબર કરો. (૧. ૩)

હવે સાધો

સિદ્ધતા.

અડ લીટી અવ ની બરોબર છે, (૨૨.)

માટે અડ લીટી ઉપરનો ચોરસ અવ લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે. (૧. ૪૬ પ્રશ્ન ૩ જો ટીપ.)

એ બન્નેમાં અક ઉપરનો ચોરસ ઉમેરો;
તો કઅ અને અડ ઉપરના ચોરસોનો સર્વાળો કઅ અને અવ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.
પણ કઅડ ખૂણો કાટખૂણો છે, (૨૨.)

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ અક, અડ ઉપરના ચોરસના સર્વાળાની બરોબર છે. (૧. ૪૭)

પણ (પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે) વક ઉપરનો ચોરસ અક, અવ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે;

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ વક ઉપરના ચોરસની બરોબર છે.

માટે કડ બાબૂ પણ વક બાબૂની બરોબર હોવી જોઈએ.

માટે ડઅક, વઅક ત્રિકોણોમાં,

{ અડ લીટી અવ ની બરોબર છે.
અને અક બન્નેમાં સાધારણ છે.
અને ત્રીજી બાબૂ કડ ત્રીજી બાબૂ વકની બરોબર છે,

માટે, ડઅક ખૂણો વઅક ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૮)

પણ ડઅક કાટખૂણો છે; (૨૨.)

માટે વઅક પણ કાટખૂણો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાબૂ ઉપર ઈં પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૭ અને ૪૮ માં સિદ્ધાંતો વચ્ચે શા સંબંધ છે?

(૨) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે? અને ભૂમિતિના પહેલા પુસ્તકમાં એવા પુરાવાથી કયા સિદ્ધાંતો સાબિત કીધા છે? તેમ કરવાનું કારણ શું?

(૩) જો અઘક ત્રિકોણમાં અઘ બાજુ અઘની બમણી હોય, અને અકનો વર્ગ અઘના વર્ગનો ત્રણ ગણો હોય તો અઘક ખૂણો કાટખૂણો થશે,

છેલ્લા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) કોઈ પણ લીટી ઉપરનો ચોરસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચોરસનો ચાર ગણો થશે; અને તેના એક તૃતીયાંશ ઉપરના ચોરસનો નવ ગણો થશે.

(૨) એક ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપરનો ચોરસ બીજા બે બાજુઓ ઉપરના ચોરસના સર્વાળાથી વધારે હોય; તો તે બાજુઓ વચ્ચેનો ખૂણો પહોળો ખૂણો હોવો જોઈએ.

(૩) એક સમઘ્રિબાજુ કાટખૂણું ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુ વચ્ચે શો સંબંધ છે ?

(૪) એક કાટખૂણું ત્રિકોણમાં એક ખૂણો એક કાટખૂણાનો તૃતીયાંશ હોય તો બીજા ખૂણા કેટલા કેટલા થવા જોઈએ ? અને તેવા ત્રિકોણની દરેક બાજુ કર્ણનો કેટલો ભાગ થશે ?

(૫) એક સમબાજુ ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ ઉપર દોરેલી લંબ દરેક બાજુનો કેટલો ભાગ થશે ?

(૬) એક કાટખૂણું ત્રિકોણના કાટખૂણાથી કર્ણ ઉપર લંબ દોરીને કર્ણના દરેક ભાગના વર્ગના સર્વાળામાં લંબના વર્ગનું બમણું ઉમેરિયે તો કર્ણના વર્ગ બરાબર થશે.

(૭) એક ચોરસ એવો બનાવો કે તે બે આપેલા ચોરસના સર્વાળા બરાબર થાય.

(૮) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે તેઓના વર્ગનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીના વર્ગની બરાબર થાય.

